

Явления переноса в газах.

Содержание:

1. Длина свободного пробега молекул.
2. Распределение молекул по длинам свободного пробега.
3. Диффузия.
4. Вязкость газа (внутреннее трение).
5. Формула Пуазейля.
6. Формула Стокса.
7. Теплопроводность.

Длина свободного пробега молекул.

Согласно основным положениям МКТ все тела состоят из огромного количества частиц, между которыми есть промежутки. Эти частицы находятся в состоянии непрерывного теплового хаотического движения. В процессе этого движения частицы претерпевают многократные столкновения между собой. Расстояние, которое проходит частицы между двумя последовательными соударениями называют длиной свободного пробега молекулы. Величина этого пути может меняться от столкновения к столкновению, поэтому целесообразно ввести понятие средней длины свободного пробега молекулы l . Впервые это понятие было введено Клаузиусом. Определим, от каких параметров зависит эта величина?

Во-первых, необходимо скорректировать модель идеального газа. Действительно, если считать газ совокупностью материальных точек, то вероятность столкновения двух частиц газа стремиться к нулю. Зададимся некоторым характерным диаметром молекулы d .

Рассмотрим две молекулы, которые движутся со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Их относительную скорость можно вычислить по теореме косинусов:

$$\overrightarrow{v_{отн}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$$

$$v_{отн}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta$$

Среднее значение суммы нескольких величин равно сумме средних значений этих величин:

$$\overline{v_{отн}^2} = \overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} - 2\overline{v_1v_2 \cos \theta}$$

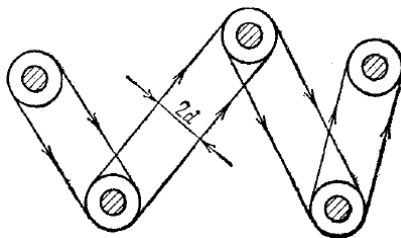
Так как среднее значение квадратов абсолютных скоростей всех молекул одинаково:

$$\overline{v_1^2} = \overline{v_2^2} = \overline{v^2}, \text{ а } \overline{\cos \theta} = 0, \text{ то } \overline{v_{отн}^2} = 2\overline{v^2} \text{ или}$$

$$\sqrt{\overline{v_{отн}^2}} = \sqrt{2}\sqrt{\overline{v^2}}$$

Видно, что среднее значение относительных скоростей молекул в $\sqrt{2}$ раз больше соответствующих средних значений абсолютных скоростей [Зисман, Тодес; 1969].

Будем считать, что все молекулы газа неподвижны, за исключением одной, которая движется между ними со средней относительной скоростью $\overline{v_{отн}} = \sqrt{2}\overline{v}$. Таким образом, молекула испытает столкновения со всеми неподвижными молекулами, центры которых находятся в пределах ломаного цилиндра радиуса d . Объем этого цилиндра, с учетом того, что его длина много больше его радиуса, определяется выражением:



$$V = \pi d^2 \bar{v}_{омн} \Delta t$$

Считая концентрацию молекул газа постоянной, и равной по определению $n = \frac{N}{V}$, число молекул, находящихся внутри ломаного цилиндра будет равно:

$$z = nV = n\pi d^2 \bar{v}_{омн} \Delta t,$$

где Δt - время, в течение которого рассматривается движение молекул. Число столкновений молекул в единицу времени в единице объема Z получим из следующего выражения:

$$Z = \frac{1}{2} \frac{zn}{\Delta t} = \frac{1}{2} \pi d^2 \bar{v}_{омн} n^2$$

Среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями:

$$l = \frac{\bar{v} \Delta t}{z} = \frac{\bar{v} \Delta t}{n\pi d^2 \bar{v}_{омн} \Delta t} = \left| \frac{\bar{v}}{\bar{v}_{омн}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

Таким образом, средняя длина свободного пробега молекул не зависит от температуры, так как с ростом температуры возрастает, и средняя скорость движения молекул и число столкновений в единицу времени.

При постоянной температуре концентрация газа пропорциональна давлению $p = nkT$. Тогда, по мере разрежения газа средняя длина свободного пробега возрастает так, что:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

$$lp = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2} = const$$

Итак, средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна концентрации молекул n и сечению рассеяния σ :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{\alpha}{\sigma n}$$

α - коэффициент пропорциональности. В случае, если в сосуде находится смесь газов с концентрациями n_1 и n_2 соответственно, которые не взаимодействуют химически, то средние длины свободного пробега соответствующих молекул будут определяться как:

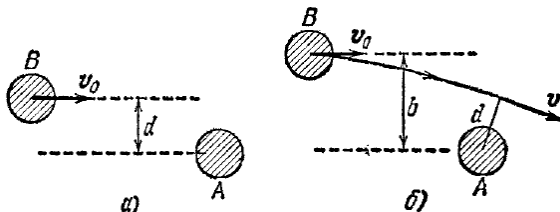
$$l_1 = \frac{\alpha}{\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2}; \quad l_2 = \frac{\alpha}{\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2}$$

Эффективным сечением σ называется отношение среднего числа частиц, выбывших из пучка в единицу времени при столкновениях, приводящих к требуемому результату (рассеянию, поглощению, ионизации), к интенсивности самого пучка.

$$\sigma = \frac{\Delta N}{I}$$

В 1893 году Сезерленд установил зависимость сечения рассеяния от относительной скорости, учитывая силы притяжения между молекулами, в промежутках между столкновениями. На близких расстояниях силы притяжения становятся существенными и делают возможными те столкновения, которые не произошли бы в их отсутствии. То есть силы притяжения увеличивают эффективное сечения рассеяния.

На рисунке ниже показан пример иллюстрирующий работу сил притяжения. В случае а) столкновение будет наблюдаться всегда, а в случае б) только при наличии сил притяжения.



$$\sigma = \pi b^2; \quad \sigma_0 = \pi d^2$$

По закону площадей: $v_0 b = v d$; $\sigma v_0^2 = \sigma_0 v^2$, v – скорость в момент сближения, которую можно определить из закона сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 + A$$

A – работа центральных сил притяжения, μ – приведенная масса. Объединяя приведенные выражения, получаем сечение рассеяния:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{A}{\varepsilon_{\text{отн}}} \right)$$

$\varepsilon_{\text{отн}}$ – относительная кинетическая энергия $\frac{1}{2} \mu v_0^2$. Последняя формула получена в предположении о том, что взаимодействуют лишь две молекулы, что справедливо для разреженных газов. Если отказаться от этих допущения и провести усреднение молекул по скоростям, то для эффективного сечения рассеяния будет справедлива формула Сезерленда:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{S}{T} \right)$$

S – постоянная Сезерленда.

Распределение молекул по длинам свободного пробега.

Рассмотрим движение параллельного пучка молекул. Пусть в некоторый момент времени на прямой АВ этот пучок имел интенсивность J_0 . Найдем интенсивность J этого пучка на расстоянии x от прямой АВ.

Выберем пучок толщиной dx и единичным поперечным сечением. Число частиц в таком пучке равно $N = n S dx = n dx$. По определению эффективного сечения рассеяния число частиц выбывших из пучка из-за столкновений с молекулами газа:

$$dN = J \sigma n dx = \left| l = \frac{1}{\sigma n} \right| = \frac{J}{l} dx$$

$$dJ = -\frac{J}{l} dx$$

Знак минус означает уменьшение интенсивности пучка. После интегрирования имеем:

$$J = J_0 e^{-\frac{x}{l}}; \quad N = N_0 e^{-\frac{x}{l}}$$

Величину $\frac{1}{l}$ называют коэффициентом рассеяния, он показывает вероятность рассеяния на единицу длины пучка частиц. На основании двух последних формул Борном и Борманом в 1921 году был предложен метод непосредственного измерения длины свободного пробега молекул.

Диффузия

Вычислим поток молекул через площадку, перпендикулярную некоторой оси ОХ, за время Δt . Заметим, что поток частиц через данную площадку может быть направлен как по направлению выбранной оси N_+ , так и противоположно ей N_- .

$$N_+ = \frac{1}{6} n_1 \bar{v} S \Delta t; \quad N_- = \frac{1}{6} n_2 \bar{v} S \Delta t$$

Здесь считается, что все молекулы, проходящие через площадку, испытали свое последнее соударение с другими молекулами на одном и том же расстоянии от нее, равном средней длине свободного пробега. Суммарный поток представляет собой разность этих двух потоков:

$$\Delta N = N_+ - N_- = \frac{1}{6} \bar{v} S \Delta t (n_1 - n_2)$$

Поток молекул будет определяться следующим образом:

$$J = \frac{\Delta N}{S \Delta t} = \frac{1}{6} \bar{v} (n_1 - n_2) = -\frac{1}{3} \bar{v} l \frac{(n_1 - n_2)}{2l} = -\frac{1}{3} \bar{v} l \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

$$J = -D \frac{\Delta n}{\Delta x}; \quad D = \frac{1}{3} \bar{v} l$$

D – коэффициент диффузии, $\frac{\Delta n}{\Delta x}$ – градиент концентрации на расстоянии $2l$.

Поток молекул, диффундирующих через единицу площади за единицу времени, прямо пропорционален градиенту концентрации.

Теория диффузии тесно связана с теорией броуновского движения. Движение броуновской частицы характеризуется ее подвижностью B , то есть величиной, связывающей скорость броуновской частицы u с силой F , приложенной к этой частицы.

$$u = BF$$

Эта теория может быть применена и к частицам атомарных масштабов, например к ионам, движущимся в электролитах при электролизе.

Будем рассматривать обычный идеальный газ, находящийся во внешнем потенциальном поле, для концентрации частиц которого справедливо распределение Больцмана:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$$

Потенциальная энергия газа равна $-Fx$, а наличие градиента концентрации обеспечивает диффузионный поток $J = -D \frac{dn}{dx}$. Этот поток, в состоянии равновесия, уравнивается силовым потоком BFn , обусловленным наличием внешнего поля:

$$-D \frac{dn}{dx} + BFn = 0$$

$$-D \frac{F}{kT} n + BFn = 0; \quad D = kTB$$

Последнее выражение называется соотношением Эйнштейна для связи коэффициентов диффузии и подвижности.

Вязкость газа (внутреннее трение).

Рассмотрим направленное движение некоторого количества газа. Разобьем весь объем газа на слои малой толщины. Опыт показывает, что слои газа, находящиеся в центре движутся с большей скоростью, нежели слои, расположенные ближе к периферии. Этот факт говорит о некотором взаимодействии между слоями газа, так как в противном случае скорость всех слоев была бы одинакова. Все частицы газа участвуют в двух движениях: тепловом движении и направленном дрейфовом движении. Среднее значение скорости теплового хаотического движения равно $\bar{v}$, а среднее значение вектора скорости теплового движения равно нулю, так как все направления движения молекулы равновероятны. Вектор же дрейфовой скорости имеет совершенно определенное направление, поэтому, когда молекула диффундирует из одного слоя газа в другой, она переносит с собой импульс, равный импульсу частиц того слоя, откуда она диффундировала.

Перемешивание слоев в виду хаотического движения молекул обеспечивает выравнивание скоростей и перенос импульса, что выражается в макроскопическом масштабе как вязкость или внутреннее трение.

Переносимый импульс будет определяться выражением:

$$mv_1 N_+ = mv_1 \frac{1}{6} n \bar{v} S \Delta t; \quad mv_2 N_- = mv_2 \frac{1}{6} n \bar{v} S \Delta t$$

$$\frac{\Delta p}{S \Delta t} = f_{\text{тр}} = -\frac{1}{3} \bar{v} \ln m \frac{(v_1 - v_2)}{2l} = -\frac{1}{3} \bar{v} \ln m \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta v}{\Delta x}$ – градиент скорости движения газа, v_1, v_2 – скорость дрейфа в соседних слоях газа. Полученное выражение определяет поток импульса через данную площадку. Сила, действующая на данной площадке, определяет силу вязкого трения.

$$f_{\text{тр}} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x}; \quad \eta = -\frac{1}{3} \bar{v} \ln m$$

η – коэффициент внутреннего трения или просто вязкость.

Формула Пуазейля

Этот закон был экспериментально получен Ньютоном и лег в основу изучения движения вязкой жидкости. Применим его к движению идеальной жидкости внутри трубы. Будем считать, что жидкость движется с постоянной скоростью, значение которой меняется от нуля у краев трубки до максимума в центре трубы.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}; \quad \tau = \frac{F}{S}$$

Выделим цилиндрический элемент трубы длиной l . Сила вязкого трения, действующая на жидкость, определится как:

$$F = S\mu \frac{dv}{dr} = 2\pi r l \mu \frac{dv}{dr}$$

Так как жидкость движется с постоянной скоростью, то силы вязкого трения должны быть уравновешены разностью давлений на концах цилиндра:

$$2\pi r l \mu \frac{dv}{dr} + (p_1 - p_2)\pi r^2 = 0$$

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r dr$$

Проинтегрируем это выражение, учитывая, что у стенок сосуда скорость жидкости обращается в ноль.

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2 + C = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

Для расчета количества протекшей жидкости через данное поперечное сечение в единицу времени необходимо просуммировать потоки от каждого элементарного цилиндрического слоя:

$$dQ = v dS = v 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R 2\pi v r dr = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

Вычисляя этот интеграл, приходим к формуле Пуазейля:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

Формула Стокса

Рассмотрим движение шарика радиуса r со скоростью v_0 , увлекающего за собой слои газа. Очевидно, что чем больше радиус шарика, тем большая масса газа увлекается им в движение:

$L = \alpha r$, где L - расстояние от поверхности шарика. Коэффициент пропорциональности должен быть различен для передней и задней поверхностей шарика, поэтому здесь мы будем подразумевать его среднее значение. Среднее значение градиента скорости по поверхности равно:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v_0 - 0}{\alpha r} = \frac{v_0}{\alpha r}$$

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{тр}} S = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} S = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} 4\pi r^2 = -\eta \frac{v_0}{\alpha r} 4\pi r^2 = -\frac{4\pi}{\alpha} v_0 \eta r$$

Интегрирование уравнения движения, проведенное Стоксам для шара, дало значение коэффициента пропорциональности $\alpha = \frac{2}{3}$, таким образом, сила вязкого трения, действующая на шар, движущейся в вязкой жидкости определяется выражением (формула Стокса):

$$F_{\text{тр}} = -6\pi r \eta v_0$$

Теплопроводность

Рассмотрим газ, помещенный между двумя стенками, имеющими разные температуры T_a и T_b соответственно. Температура газу будет являться функцией координат, расположенных на оси, проведенной перпендикулярно стенкам. Частицы, обладающие разной энергией, вследствие хаотического движения, будут перемешиваться, что приведет к наступлению теплового равновесия. В результате этого перемешивания через единичную площадку в единицу времени будет переноситься поток тепла. Вычислим его исходя из следующих упрощений:

1. будем считать, что молекулы находящиеся в близких слоях имеют одну и ту же скорость, хотя и различные энергии;
2. в соседних слоях газа концентрация частиц одинакова.

Будем рассматривать идеальный одноатомный газ. Средняя энергия молекул такого газа в соседних слоях $E_1 = \frac{3}{2}kT_1$ и $E_2 = \frac{3}{2}kT_2$ соответственно. Поток энергии через площадку S за время Δt равен:

$$q = \frac{Q}{S\Delta t} = -\frac{1}{3}\bar{v}\ln\frac{T_2 - T_1}{2l}\frac{3}{2}k = -\frac{1}{3}\frac{3}{2}k\bar{v}\ln\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$q = -\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

λ - коэффициент теплопроводности.

Теплоемкость единицы объема идеального одноатомного газа равна: $\rho c_v = \frac{3}{2}kn$, следовательно:

$$\lambda = \frac{1}{3}\bar{v}l\rho c_v$$

Рассмотрим зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры. Для этого воспользуемся формулой Сезерленда:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{S}{T} \right)$$

Выражая коэффициенты теплопроводности и внутреннего трения через эффективное сечение рассеяния имеем:

$$\lambda = \frac{m}{3\sigma} \bar{v} c_v; \quad \eta = \frac{m}{3\sigma} \bar{v}$$

$$\eta = \frac{A\sqrt{T}}{\left(1 + \frac{S}{T} \right)}$$

A - константа. $\sqrt{T}$ появляется при использовании гипотезы Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы.

Литература

1. Д.В. Сивухин Курс общей физики т.2
2. Г.А. Зисман, О.М. Тодес Курс общей физики Т.2
3. С.Э Хайкин Физические основы механики.

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Специализированный учебно – научный центр
им. А.Н. Колмогорова

**«Явления переноса
в газах»**

Москва – 2010

