Лекция №1. Лукьянов И.В.

Кинематика

Содержание раздела:

1. Понятие механического движения
2. Описание механического движения
3. Кинематика движения в однородном поле
4. Преобразования Лоренца
5. Сложное движение твердого тела. Мгновенная ось вращения.

Понятие механического движения.

Механика – раздел физики, посвященный изучению простейшей формы движения материи – механическому движению. Настоящая лекция посвящена изучению такого раздела механики, как кинематика. Кинематика изучает, а вернее даже описывает, процесс механического движения, без выяснения причин, вызвавших это движение. Можно сказать, что кинематика отвечает на вопросы где? и когда? Под понятием *механического движения* мы будем понимать процесс изменения положения одного тела относительно других тел. Тело, относительно которого описывается механическое движение, называется телом отсчета. Введение понятия тела отсчета совершенно необходимо, так как иначе не ясно, относительно чего рассматривать процесс движения. При этом, выбирая различные тела отсчета, мы приходим к тому, что меняется сам характер движения. Так, например, если за тело отсчета мы примем само движущееся тело, то мы придем к тому, что оно всегда будет находиться в покое.

Описание движения проводится в рамках выбранной системы отсчета – совокупности тела отсчета, связанной с телом отсчета, системы координат и покоящихся синхронизированных часов. Требования синхронизации часов и их неподвижности, относительно тела отсчета, принципиальны, так как согласно специальной теории относительности (СТО) ход покоящихся часов отличается от хода движущихся часов. Мы можем измерять моменты времени, только по покоящимся часам, а это может быть реализовано двумя способами:

1. В любой точке пространства, где мы измеряем время, должны находиться часы. Перед измерениями необходимо произвести процедуру синхронизации часов.
2. Часы находятся лишь в некоторых точках пространства, поэтому для измерения моментов времени, нам необходимо сопоставлять событие, момент времени, который мы измеряем, и показания часов.

В обоих случаях, для синхронизации часов и сопоставление показания удаленных часов и момента времени, в который произошло данное событие, необходим источник световых волн или радиоволн, которые распространяются в свободной среде с постоянной скоростью, равной скорости света. Этот факт позволяет произвести синхронизацию часов (подробно у С.Э. Хайкина).

В физике выделяют два широких класса систем отсчета: инерциальные системы отсчета (ИСО) и неинерциальные системы отсчета (НИСО). Подробно они будут рассмотрены в курсе динамики, здесь же отметим, что в рамках кинематики эти две системы равноправны.

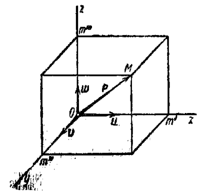
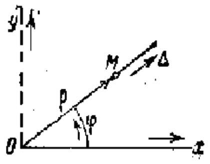
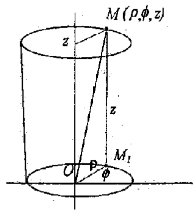
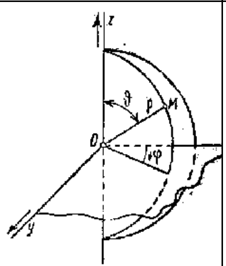
Задавшись телом отсчета, к нему необходимо «привязать» систему координат. Системы координат можно разделять по двум критериям:

1. Число измерений пространства. Конечномерные (одномерные, двумерные, трехмерные, и т.д.) и бесконечномерные.
2. Прямолинейные и криволинейные системы координат.

Характер движения, а также протекание того или иного физического процесса, не зависит от выбора системы координат (СК). Выбор СК диктуется лишь соображениями удобства при решении данной задачи (под удобством понимается сокращение объемов математических выкладок). Так, при изучении движения на поверхности земного шара нам предпочтительна сферическая система координат, центр которой совпадает с центром Земли. При изучении движения на плоскости нам более удобна, двумерная декартова система координат. Любая система координат позволяет единственным образом задать положение тела в данной точке пространства. Поэтому, всегда существует взаимно-однозначная связь между различными системами координат. В нашем курсе мы будем использовать декартову прямоугольную систему координат, число измерений которой будет подбираться согласно условию задачи.

Приведем таблицу, содержащую наиболее часто используемые в физике системы координат, а также формулы перехода из этих систем координат в декартову СК. Отметим, что физический смысл законов физики не меняется, в зависимости от того, в какой системе координат они записаны, однако вид уравнений, описывающих эти законы, может существенно меняться.

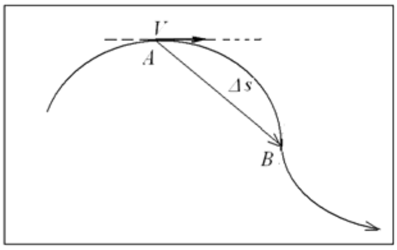
Подробное математическое описание различных систем координат можно найти в монографии академика Н.И. Мусхелишвили «Курс аналитической геометрии».

Система координат	Рисунок	Основные величины	Формулы перехода в декартову СК	Модуль радиус – вектора
Декартова ск		x, y, z		$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Полярная		ρ, φ	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
Цилиндрическая (полуполярная)		ρ, φ, z	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Сферическая		ρ, φ, θ	$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$ $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ $z = \rho \cos \theta$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Рассматривая механическое движение тела, нам необходимо рассмотреть движение всех точек, входящих в состав данного тела. В связи с этим, принципиальным становится рассмотрение вопроса о механическом движении точки.

Описание любого физического процесса, как-то и механического движения, происходит в рамках выбранной, абстрактной, физической модели. Для описания механического движения используется две модели: материальная точка и абсолютно твердое тело. *Материальной точкой* называют тело, размерами которого, в условиях решения данной задачи, можно пренебречь. *Абсолютно твердым телом* называется тело, расстояние, между любыми различными точками которого всегда остается неизменным. Другими словами, абсолютно твердое тело (далее просто твердое тело) - тело которое не испытывает деформаций.

Пусть материальная точка перемещается из пункта *A* в пункт *B*. Это процесс может происходить различным образом. Кривая, по которой двигалось тело, в процессе механического движения, называется *траекторией*. Путь, пройденный телом, за время движения, есть длинна траектории. Для определения пути нам необходимо знать математическое уравнение траектории, то есть уравнение кривой, по которой движется тело. Вектор, проведенный из начального положения тела, в его конечное положение, называется перемещением тела. В приведенном нами примере, перемещение, есть не что иное, как вектор ($\overrightarrow{AB}$). Таким образом, для пространственной характеристики движения используют понятия пути (или траектории) и перемещения.



Всякое движение материальной точки мы вправе рассматривать, как сумму последовательных перемещений, образующих некоторую ломаную. Чем меньше моменты времени, за которые совершались эти перемещения, тем с большой точностью сумма этих перемещений будет ровняться пути, пройденному материальной точкой. В пределе, устремив эти временные промежутки к нулю, мы придем к реальной траектории тела. Таким образом, всякое сложное движение может быть разбито на пространственно – временные составляющие. В некоторых случаях, этот прием облегчает анализ движения материальной точки.

Опыт показывает, что различные тела проходят одни и те же расстояния, за различные промежутки времени. В связи с этим, появляется необходимость введения некоторой величины, характеризующей интенсивность или быстроту изменения положения тела с течением времени.

Механическое движение может иметь весьма сложный характер и его интенсивность может меняться с течением времени (автобус сначала разгоняется, потом едет равномерно, а затем затормаживает перед остановкой), поэтому вводимая характеристика должна иметь смысл в данный момент времени. Такой величиной стала мгновенная скорость механического движения.

Мгновенной скоростью движения в любой точке траектории называется вектор, направленный по касательной к траектории, а по величине равный пределу средней скорости, при стремлении промежутка времени к нулю.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

Другими словами, мгновенная скорость материальной точки равна производной перемещения, совершенного этой точкой, по времени.

Как было отмечено выше, в процессе движения скорость материальной точки может меняться, быстрота изменения скорости материальной точки характеризуется величиной ускорения этой материальной точки.

Ускорение есть вектор, направленный под углом к траектории, в сторону ее вогнутости, а по величине равный пределу отношения изменения скорости, совершенного за малый промежуток времени к величине этого промежутка, стремящегося к нулю.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

При решении различных задач, нас не всегда интересуют детали движения (например, значение скоростей и ускорений на каждом участке пути), часто достаточно знать средние значения этих величин. Отношение пути $\Delta\vec{s}$, пройденного телом за промежуток времени Δt, к величине этого промежутка, называется средней скоростью. Аналогично можно ввести понятие среднего ускорения.

С математической точки зрения, среднее значение любой периодической функции за определенный промежуток времени может быть найдено по следующей формуле:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

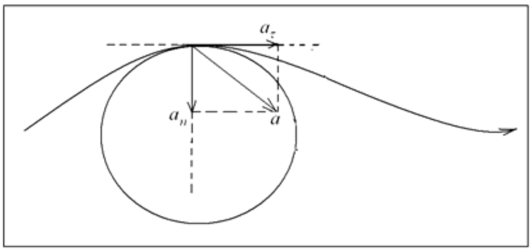
Таким образом, основными характеристиками механического движения являются: перемещение, путь, скорость и ускорение. Основной задачей механики является определение положения, скорости и ускорения тела, в произвольный момент времени.

Перечислим основные вопросы, которые могут нас интересовать при описании механического движения.

1. Определить скорость и положения тела в любой момент времени.
2. Вычислить путь, пройденный телом за данное время.
3. Определить форму и уравнение траектории, по которой двигалось тело.
4. Определить среднюю скорость или среднее ускорение в процессе движения.
5. Определить скорость и положение тела в некоторой системе координат, движущейся относительно данной.
6. Определить скорость одного тела относительно другого, если известны их скорости относительно тела отсчета.

Механическое движение материальной точки можно классифицировать двумя способами: по форме траектории или по характеру движения. По форме траектории выделяют прямолинейное и криволинейное движение. В криволинейном движении, особую роль играет движение по окружности (вращательное движение). По характеру движение может быть равномерным (ускорение тела равно нулю) или ускоренным. Ускоренное движение может наблюдаться как с постоянным ускорением (равноускоренное движение), так и с переменным.

В общем случае ускоренного движения, вектор ускорения направлен под некоторым углом к траектории. Этот вектор может быть разложен на две составляющие: параллельную скорости (тангенциальную составляющую) и перпендикулярную скорости (нормальную составляющую).



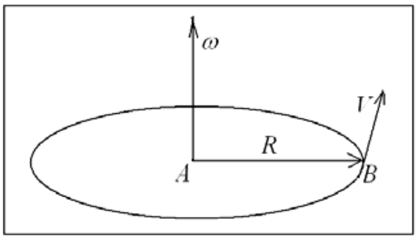
Ускорение, направленное перпендикулярно скорости, называется центростремительным.

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_\tau}; \quad a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2}$$

Рассмотрим частный случай криволинейного движения – вращательное движение. В случае вращательного движения имеет место как центростремительное ускорение, направленное к центру окружности, по которой вращается данная материальная точка, так и линейное ускорение, совпадающее по направлению со скоростью, и направленное по касательной к окружности. При движении по окружности материальная точка, за некоторое время Δt, не только совершает перемещение Δs, но и совершает поворот на угол $\Delta\varphi$. Во многих случаях нас будет интересовать интенсивность изменения угла $\Delta\varphi$. В связи с этим, вводят понятие угловой скорости и углового ускорения. Это делается совершенно аналогично тому, как были введены линейные скорость и ускорение. Отметим, что понятие углового ускорения дает нам возможность классифицировать движение по окружности как движение равномерное, то есть без углового ускорения, равноускоренное, с постоянным угловым ускорением, и неравномерное, то есть с переменным угловым ускорением.

Прямолинейное движение		Вращательное движение	
Перемещение	Δs	Угол поворота	$\Delta\varphi$
Линейная скорость	$v = \frac{ds}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Линейное ускорение	$a = \frac{dv}{d}t$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
	$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$		$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

При этом угловая скорость ортогональна линейной скорости и радиусу окружности вращения. Направление угловой скорости определяется по правилу буравчика, рукоять которого направлена по направлению вращения линейной скорости. Направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора угловой скорости.



Выше мы определили понятие угла поворота из физических соображений. Однако, это можно сделать и из формальных математических соображений. Вращательное движение материальной точки по окружности радиуса r является плоским движением и может быть описано в двумерной прямоугольной декартовой системе координат (XOY). В процессе движения материальной точки будут меняться обе координаты тела, уравнение траектории в данном случае будет представлено уравнением окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Однако, в процессе движения, материальная точка все время будет находиться на расстоянии радиуса от начала координат, это говорит о том, что описание данного движения будет проще производить в полярной системе координат $(rO\varphi)$. При описании движения материальной точки в полярной системе координат меняться будет только координата φ.

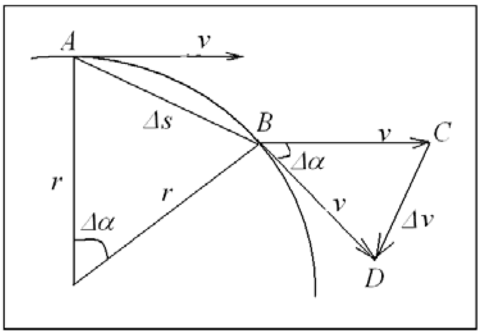
Для характеристики вращательного движения также вводят такие величины, как период и частота обращения по окружности. Периодом обращения материальной точки по окружности T называется время, за которое совершается один полный оборот. Частотой обращения материальной точки по окружности ν называется величина, равная отношению числа оборотов n, совершенных за некоторый промежуток времени t , к величине этого промежутка. Из определений ясно, что период обращения и частота обращения есть величины взаимно обратные.

$$T = \frac{t}{n}; \nu = \frac{n}{t} \rightarrow T\nu = 1$$

В частности, если совершается один оборот по окружности, то

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Между линейной и угловой скоростью существует связь, установим ее следующим образом. Пусть материальная точка равномерно движется по окружности радиуса r . За время Δt материальная точка совершает перемещение Δs из точки A в точку B.



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2r\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}\ ;\ \Delta t \to 0, \Delta\alpha \to 0,\ \sin\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\Delta\alpha}{2}$$

$$v = \frac{2r\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t} = \omega r$$

Треугольники BCD и OAB подобны, как равнобедренные с одинаковыми углами. Отсюда заключаем, что

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r}AB;\ \Delta t \to 0, AB \to \Delta s$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{v}{r}AB}{\Delta t}, \qquad a_n = \frac{\frac{v}{r}\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}; \quad a_n = \frac{v^2}{r} = |v = \omega r| = \omega^2 r$$

Таким образом, мы установили связь между линейными и угловыми величинами. При решении конкретных задач, нас интересует, где будет находиться тело в определенный момент времени, то есть нам необходимо установить зависимость координаты от времени. В механике такая зависимость называется законом движения. Обычно, нам известно начальное положение тела и его начальная скорость. Для отыскания закона движения необходимо решить обратную задачу, то есть, зная зависимость скорости от времени установить зависимость координаты от времени. Решим ее следующим образом:

$$a = \frac{dv}{dt} \to dv = adt;\ \ v = \int adt = at + C_1$$

$$v = \frac{ds}{dt} \to ds = vdt;\ \ s = \int vdt = \int (at + C_1)\, dt = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2$$

$$t = 0 \to v = v_{0'}\, s = s_0 \Rightarrow C_1 = v_{0'}\, C_2 = s_0$$

$$s = s_0 + v_o t + \frac{at^2}{2}$$

Значения и определяются из начальных условий. Фактически это начальная координата и начальная скорость соответственно.

Описание механического движения

Ранее были введены основные кинематические характеристики, описывающие движение материальной точки. Рассмотрим теперь способы описания механического движения, использующие эти характеристики.

Существует три основных способа описания механического движения: векторный, координатный и естественный [Иродов, 2002]. Их основные положения и сравнительный анализ приведены в таблице ниже. Выбор способа описания зависит от условий конкретной задачи.

Векторный способ описания механического движения основан на описании изменения радиус – вектора материальной точки во времени и пространстве. Принципиальным является тот факт, что радиус – вектор частицы может быть проведен не только из начала данной системы координат, но и из любой другой точки. В процессе механического движения конец радиус – вектора будет описывать траекторию частицы, а его изменение – перемещение частицы.

Координатный способ требует задания фиксированной системы координат, выбор которой определяется условием задачи (симметрия, стремление к упрощению математических выкладок и т.д.). Записываются законы движения материальной точки для каждой из координатных осей, после чего определяются значения скорости и ускорения частицы. Уравнение траектории находится путем параметризации времени из законов движения. Для двумерного случая, этот процесс можно показать следующей схемой:

$$x = x(t) \rightarrow t = t(x);\ \ y = y(t) = y\big(t(x)\big) = y(x).$$

Естественный способ требует того, чтобы траектория материально точки была известна заранее. Задавая начало отсчета на траектории, а также положительное направление отсчета, положение частицы определяется дуговой координатой на линии траектории. Вектора скорости и ускорения определяются через касательный и нормальный вектора к траектории в каждый момент времени.

Способы описания механического движения материальной точки

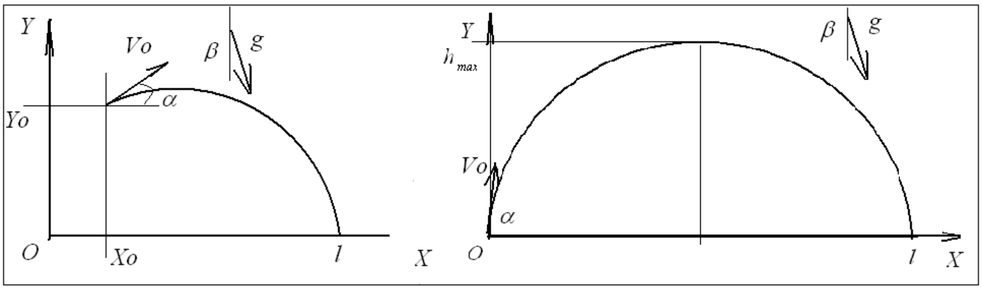
Способ описания движения	Прямая задача		Обратная задача	
	дано	найти	дано	Найти
Векторный	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	$\vec{a} = \vec{a}(t)$ $\vec{r}\|_{t=0} = \vec{r}_0$ $\vec{v}\|_{t=0} = \vec{v}_0$	$\vec{v} = \int \vec{a}(t)dt$ $\vec{r} = \int \vec{v}(t)dt =$ $= \int\int \vec{a}(t)dtdt$
Координатный	$x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$	$v_x = \frac{dx}{dt};\ a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ $v_y = \frac{dy}{dt};\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ $v_z = \frac{dz}{dt};\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$	$a_x = a_x(t);\ x\|_{t=0} = x_0$ $v_x\|_{t=0} = v_{x0}$ $a_y = a_y(t);\ y\|_{t=0} = y_0$ $v_y\|_{t=0} = v_{y0}$ $a_z = a_z(t);\ z\|_{t=0} = z_0$ $v_z\|_{t=0} = v_{z0}$	$v_x = \int a_x(t)dt$ $v_y = \int a_y(t)dt$ $v_z = \int a_z(t)dt$
Естественный	Известна траектория материальной точки $l = l(t)$ Начало отсчета и положительное направление отсчета дуговой координаты.	$\vec{v} = v_\tau\vec{\tau}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ $v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} = v_\tau^2\frac{d\vec{\tau}}{dl}$ $\left\|\frac{d\vec{\tau}}{dl}\right\| = \frac{1}{\rho};\ \frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{\rho}$ $\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{\vec{n}}{\rho}$		

Кинематика движения в однородном поле.

В дальнейшем, мы выясним, что движение тел происходит под действием тех или иных сил. Наличие этих сил обусловлено существованием соответствующего поля (для сил тяжести – гравитационного, для электрических и магнитных сил – электромагнитного поля). Если силы, действующие в некотором пространстве, не меняются по значению и направлению, при переходе от одной точки пространства к другой, то такие поля называются однородными. Примерами однородных полей могут служить: поле тяжести вблизи поверхности Земли и других планет, электрическое поле внутри заряженного конденсатора, магнитное поле внутри соленоида (катушки с током).

Однородное силовое поле является наиболее простым для рассмотрения, как с физической, так и с математической точки зрения. Поэтому, рассмотрение однородного поля является принципиальным для понимания физических процессов, происходящих как в однородных, так и в неоднородных полях. В дальнейшем изложении, будет использоваться лишь тот факт, что поле является однородным, без уточнения природы этого поля, это означает, что полученные результаты будут применимы к любым однородным полям.

Итак, рассмотрим движение материальной точки, брошенной под некоторым углом к горизонту вблизи поверхности Земли. Будем считать, что на материальную точку действует только сила тяжести, и не действуют силы сопротивления движению со стороны атмосферы (воздуха). В этом случае, материальная точка будет двигаться в однородном поле.



При движении в однородном поле, тело имеет постоянное ускорение, в данном случае – ускорение свободного падения. Запишем закон движения, для случая равноускоренного движения.

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Зададимся системой координат, начало отсчета которой, поместим в точку O (см. рисунок). Проекции закона движения на координатные оси будут иметь вид:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

$$v_{0x} = v_0 cos\alpha;\ a_x = acos\beta$$

$$v_{0y} = v_0 sin\alpha;\ a_y = -asin\beta$$

$$x = x_0 + v_0 cos\alpha t + \frac{acos\beta t^2}{2}$$

$$y = y_0 + v_0 sin\alpha t - \frac{asin\beta t^2}{2}$$

Определим дальность полета l , а также угол α, при котором дальность полета будет максимальной. Дальность полета будет определяться из условия, что тело соприкасается с поверхностью Земли, то есть, в этот момент времени, его координата по оси OY ровняется нулю.

$$l = x_0 + v_0 cos\alpha t + \frac{acos\beta t^2}{2};\quad 0 = y_0 + v_0 sin\alpha t - \frac{asin\beta t^2}{2}$$

Мы имеем два уравнения и два неизвестных: дальность полета и время. Выразим из второго уравнения время и подставим в первое:

$$-\frac{asin\beta}{2}t^2 + v_0 sin\alpha t + y_0 = 0$$

$$D^2 = (v_0 sin\alpha)^2 + 4\frac{asin\beta}{2}y_0$$

$$t_1 = \frac{-v_0 sin\alpha + \sqrt{(v_0 sin\alpha)^2 + 4\frac{asin\beta}{2}y_0}}{-2\frac{asin\beta}{2}} = -\frac{v_0 sin\alpha}{asin\beta}\left(\sqrt{1 + \frac{2asin\beta}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0} - 1\right)$$

$$t_2 = \frac{-v_0 sin\alpha - \sqrt{(v_0 sin\alpha)^2 + 4\frac{asin\beta}{2}y_0}}{-2\frac{asin\beta}{2}} = \frac{v_0 sin\alpha}{asin\beta}\left(\sqrt{1 + \frac{2asin\beta}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0} + 1\right)$$

Так как $t > 0$, а $cos\alpha, cos\beta > 0$, то t_1 не удовлетворяет условию задачи. Подставим t_2 в проекцию закона движения на ось OX:

$$l = x_0 + v_0 cos\alpha t + \frac{acos\beta t^2}{2} = x_0 + v_0 cos\alpha\frac{v_0 sin\alpha}{asin\beta}\left(\sqrt{1 + \frac{2asin\beta}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0} + 1\right) + \frac{acos\beta t^2}{2}$$

$$= x_0 + v_0 cos\alpha \frac{v_0 sin\alpha}{asin\beta}\left(\sqrt{1+\frac{2asin\beta}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0}+1\right)+\frac{acos\beta\left(\frac{v_0 sin\alpha}{asin\beta}\left(\sqrt{1+\frac{2asin\beta}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0}+1\right)\right)^2}{2}=$$

$$= x_0 + \frac{v_0^2 sin2\alpha}{2asin\beta}\left(\sqrt{1+\frac{2asin\beta}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0}+1\right)+ctg\beta\frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2asin\beta}\left(\sqrt{1+\frac{2asin\beta}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0}+1\right)^2 =$$

Мы пришли к достаточно сложному выражению, которое определяет дальность полета материальной точки, брошенной под углом к горизонту, в системе координат, ориентированной произвольным образом относительно поля. Если выбрать систему координат так, что ось OX будет параллельна поверхности Земли, а ось OY перпендикулярна ее, и параллельна вектору ускорения свободного падения, то $sin\beta = 0$; $cos\beta = 1$, следовательно:

$$l = x_0 + \frac{v_0^2 cos2\alpha}{2a}\left(\sqrt{1+\frac{2a}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0}+1\right) = x_0 + \frac{v_0^2 sin2\alpha}{2a}+\frac{v_0^2 sin2\alpha}{2a}\sqrt{1+\frac{2a}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0}$$

Теперь, пусть начало координата x_0 совпадает с начальным положением тела, то есть $x_0 = 0$:

$$l = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{2a}+\frac{v_0^2 sin2\alpha}{2a}\sqrt{1+\frac{2a}{(v_0 sin\alpha)^2}y_0}$$

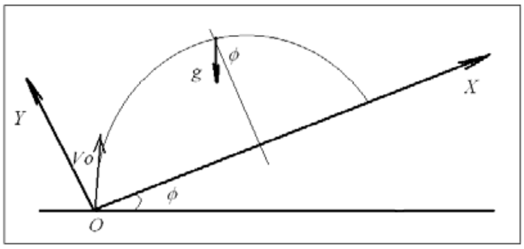
Если материальную точку бросают с поверхности Земли, то есть $y_0 = 0$, тогда выражение еще сильнее упрощается:

$$l = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{2a}+\frac{v_0^2 sin2\alpha}{2a} = \frac{v_0^2}{a}sin2\alpha$$

На данном примере, легко видеть, насколько важно правильно выбрать систему координат, в которой будет проводиться решение задачи. Если в исходном, самом общем случае, было получено громоздкое выражение, сложное как для анализа, так и для смыслового восприятия, то выбрав систему координат, должным образом, мы пришли к простому выражению. Это выражение показывает, что дальность полета материальной точки, которая движется под некоторым углом к однородному полю, зависит лишь от этого угла и начальной скорости материальной точки.

Не во всех задачах, где требуется определить дальность полета, удобно выбирать систему координат, в которой одна из координатных осей сонаправлена с вектором ускорение тела.

Например, если тело бросают у подножия горы, которая образует угол φ с горизонтом, и требуется определить, в какой точке тело упадет на горку. В данном случае, удобно задать ось OX параллельно поверхности горки, тогда задача сведется к предыдущей, если заменить ускорение свободного падения g на эффективное ускорение $gsin\varphi$ (см. рисунок).



Можно ставить задачу о максимальной высоте полета тела, брошенного под углом α к горизонту. Эта задача решается исходя из следующих рассуждений. Когда тело отрывается от поверхности Земли, вектор его скорости образует угол α с горизонтом и угол $90+\alpha$ с вектором ускорения. В процессе движения эти углы непрерывно меняются. Когда тело проходит наивысшую точку своей траектории, то вектор скорости, всегда направленный по касательной к траектории, образует нулевой угол с горизонтом и соответственно прямой угол с вектором ускорения.

Скорость, которую будет иметь тело, в момент прохождения наивысшей точки траектории определяется выражением:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}t$$

В проекциях на координатные оси:

$$v_{0x} = v_0 cos\alpha;\ a_x = 0 \qquad v_{0y} = v_0 sin\alpha;\ a_y = -g$$

$$v_x = v_0 cosa \qquad 0 = v_0 sin\alpha - gt$$

Из этих соотношений определяем время полета до максимальной точки подъема:

$$t = \frac{v_0 sin\alpha}{g}$$

Подставляем полученное для времени выражение в закон движения:

$$x = v_0 cos\alpha t = v_0 cosa \frac{v_0 sin\alpha}{g} = \frac{(v_0)^2 sin2\alpha}{g}$$

$$y = v_0 sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} = \frac{(v_0 sin\alpha)^2}{g} - \frac{(v_0 sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(v_0 sin\alpha)^2}{g}$$

Для определения угла, под которым нужно бросить тело, чтобы оно имело максимальную высоту подъема или максимальную дальность полета, при заданной начальной скорости и начальном положении, необходимо исследовать полученное выражение для дальности полета и высоты подъема на экстремум, то есть взять производную от этих выражений по углу α и прировнять ее к нулю. Легко видеть, что проделав эти операции приходим к максимальной дальности полета при угле в 45 градусов, а максимальная высота подъема достигается при угле 90 градусов.

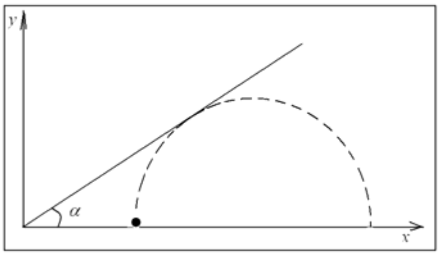
Уравнением траектории тала, движущегося в однородном поле, является парабола, форма которой зависит, прежде всего, от начальной скорости и начального угла движения между полем и начальной скоростью.

$$x = v_0 cos\alpha t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$$

$$y = v_0 sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} = v_0 sin\alpha \frac{x}{v_0 cos\alpha} - \frac{g\left(\frac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2}{2} = xtg\alpha - \frac{g}{2(v_0 cos\alpha)^2} x^2$$

Знание уравнения траектории тела позволяет решить большой круг задач. В первую очередь, это задачи баллистики. Уравнение траектории позволяет ответить на вопрос: под каким углом и с какой начальной скоростью необходимо направить снаряд, чтобы сбить определенную цель. Цель может быть как неподвижной, так и подвижной. Если цель неподвижна, то условием попадания снаряда в цель является тот факт, что траектория снаряда должна пройти через заданную точку, в которой располагается цель. Если цель подвижна, то условие пересечения траекторий цели и снаряда является лишь необходимым, но не достаточным условием. Достаточность состоит в том, чтобы цель и снаряд оказались в точке пересечения траекторий в один и тот же момент времени. Необходимое и достаточное условие выполняются путем подбора начальной скорости снаряда и угла атаки.

Важно понимать, что если мы зафиксируем начальную скорость снаряда, то мы тем самым определим семейство траекторий, по которым сможет двигаться снаряд. Другими словами, будет зафиксирована обстреливаемая область пространства. Эта область будет иметь вид параболоида вращения, вершина которого находится из условия максимальной высоты подъема снаряда, выпущенного вертикально вверх [Бутиков, 1978]. Обстреливаемая область может быть ограничена внешними препятствиями, например, когда стрельба ведется из под укрытия.



В данном случае, обстреливаемая область ограничивается конусом, образованным вращением прямой, уравнение которой в декартовых координатах имеет вид:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

При фиксированной начальной скорости, угол наклона укрытия будет определять верхнюю границу возможного угла атаки.

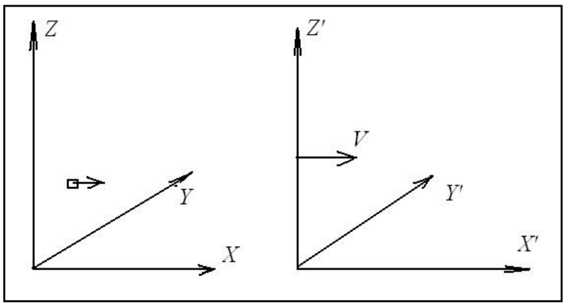
Преобразования Лоренца.

Имеются две системы отсчета: $K(XYZ)$ и $K^{'}(X'Y'Z')$. Система отсчета K' движется относительно системы отсчета K со скоростью v. Пусть некоторая материальная точка движется со скоростью u в системе отсчета K. Нас будет интересовать, как будет выглядеть движение этой материальной точки в системе отсчета K'.

Решение поставленной задачи будем основывать на двух постулатах, справедливость которых будет обоснована в дальнейшем. Эти два положения носят названия постулатов Эйнштейна:

1. Пространство однородно и изотропно, а время однородно, так что во все моменты времени, при любой ориентации системы законы физики имеют один и тот же вид.
2. Во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме имеет одно и тоже значение ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{c}$).

Будем для простоты считать, что соответствующие оси систем координат : $K(XYZ)$ и $K^{'}(X'Y'Z')$ сонаправлены, а также, что материальная точка движется параллельно оси OX. Так как пространство однородно и изотропно будем искать преобразования координат в виде:



$$x' = Ax + Bt$$

$$t' = Mx + Nt$$

Тогда, для пространственных и временных интервалов получим следующие выражения:

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = A\Delta x + B\Delta t$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = M(x_2 - x_1) + N(t_2 - t_1) = M\Delta x + N\Delta t$$

Выразим скорость материальной точки в системе отсчета K' $(\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u')$ через скорость в системе отсчета $K(\frac{\Delta x}{\Delta t} = u)$.

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{A\Delta x + B\Delta t}{M\Delta x + N\Delta t} = \frac{A\frac{\Delta x}{\Delta t} + B}{M\frac{\Delta x}{\Delta t} + N} = |\frac{\Delta x}{\Delta t} = u| = \frac{Au + B}{Mu + N}$$

Теперь необходимо определить коэффициенты A, B, M, N. Для этого рассмотрим следующие частные случаи.

1. Пусть материальная точка покоится относительно системы отсчета K'.

$$u' = 0; u = v \ \to 0 = \frac{Av + B}{Mv + N}$$

$$Av = -B$$

2. Теперь пусть материальная точка покоится относительно системы отсчета K.

$$u' = -v;\ \ u = 0 \to -v = \frac{B}{N}$$

$$N = A$$

3. Воспользуемся вторым постулатом Эйнштейна, согласно которому скорость света (электромагнитной волны) в любой инерциальной системе отсчета имеет одно и то же значение. Пусть в системах отсчета K и K' распространяется электромагнитная волна, тогда:

$$u' = u = c \ \to c = \frac{Ac + B}{Mc + N} = \frac{Ac - Av}{Mc + A} \to M = -\frac{Av}{c^2}$$

Собирая все коэффициенты вместе, приходим к релятивистскому закону сложения скоростей.

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}};\ \ u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Возвращаясь к координатам, а также принимая во внимание, что представление любой точки пространства во всякой системе координат реализуется единственным образом, а значит наши преобразования координат должны обладать свойством взаимности, имеем:

$$x' = Ax + Bt = Ax + (-Av)t = A(x - vt);\quad x = A(x' + vt')$$

$$t' = Mx + Nt = \left(-\frac{Av}{c^2}\right)x - At = A\left(t - \frac{vx}{c^2}\right);\quad t = A\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x' = A\left(A(x' + vt') - vA\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\right) = A^2\left(x' + vt' - vt' + \frac{v^2x'}{c^2}\right)$$

$$x' = A^2 x' \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

Окончательно имеем следующие формулы для преобразования координат (преобразований Лоренца):

$$x' = A(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = A\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

Преобразования относительно осей OY и OZ ищутся аналогично. В случае, если $v \ll c$, то мы приходим к классическим преобразованиям Галилея и классическому закону сложения скоростей.

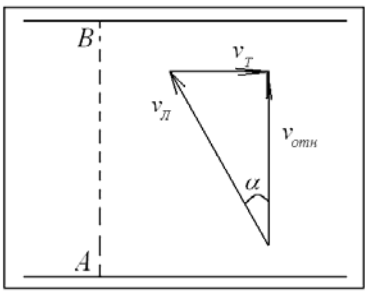
$$x' = x - vt; \quad x = x' + vt'; \; t' = t$$

$$u' = u - v; \; u = u' + v$$

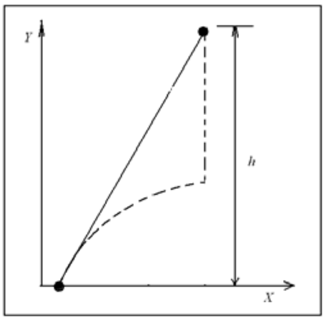
Принимая во внимание, что $a = \frac{dv}{dt}$, то дифференцируя последнее выражение, получим соотношение для ускорений.

$$a = a'$$

Закон сложения скоростей играет важную роль при решении задач кинематики, так как во многих случаях позволяет существенно упростить решение задачи. Рассмотрим пример, в котором человек в лодке переплывает через реку, скорость течения которой $v_т$. Пусть скорость лодки $v_л$. Необходимо определить, в каком направлении человеку необходимо направить лодку, чтобы он перебрался на противоположный берег без сноса. В условии задачи скорости даны относительно берега. Задача легко решается, если перейти в систему отчета связанную с течением, то есть определить скорость лодки относительно течения. Очевидно, что относительная скорость должна быть направлена в конечную точку и совпадать с вектором перемещения. В таком случае, имеем следующий треугольник скоростей:



Рассмотрим еще один пример. Пусть необходимо камнем сбить тело, которое падает без начальной скорости с некоторой высоты h. Человек, бросающий камень находится на расстоянии l от точки падения тела. Необходимо определить модуль скорости камня и ее направление.



Можно поступить как при стандартном решении задачи на встречу тел, то есть записать закон движения в проекциях на координатные оси для обоих тел и в момент встречи приравнять их координаты и времена. Однако если учесть, что и падающее тело, и камень двигаются с ускорениями равными ускорению силы тяжести, то легко показать, что в системе отсчета, связанной с одним из тел, относительное движение этих тел представляется не как равноускоренное движение, а как равномерное движение. Таким образом, переход в другую систему координат резко упрощает движение задачи. Направление движения определяется сразу – относительная скорость должна быть направлена на точку, из которой падает тело, так как телам необходимо сократить именно это расстояние.

Сложное движение твердого тела. Мгновенная ось вращения.

Всякое движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного движений. Рассмотрим два случая:

1. Тело вращается вокруг оси, положение которой остается неизменным, а сама ось движется поступательно в выбранной системе отсчета (движение колеса автомобиля).
2. Вращение тела вокруг оси положение которой остается неизменным, а сама ось вращается вокруг другой оси, неподвижной относительно выбранной системы отсчета.

Здесь сложное движение рассматривается как сумма двух движений, каждое из которых описывается в своей системе отсчета. Важно понимать, что разделение сложного движения на вращательное и поступательное неоднозначно. Нам известно лишь конечное перемещение, которое может быть получено поворотом относительно осей, имеющих различное положение, но при этом поворот всегда будет осуществляться на один и тот же угол.

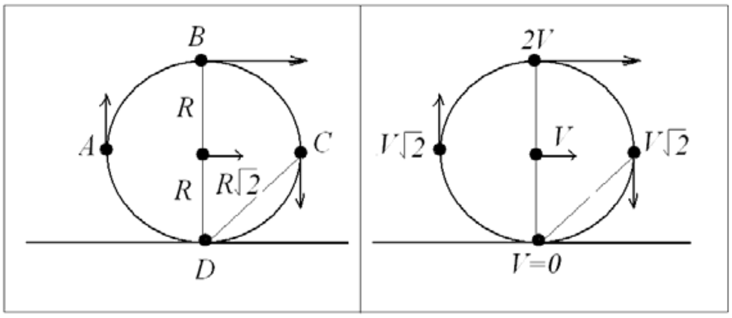
Для определения скоростей всех точек твердого тела необходимо знать скорость поступательного движения, угловую скорость вращения и положение оси вращения.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt};\ \ \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt};\ \ \vec{v}' = [\vec{\omega}\vec{r}]$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

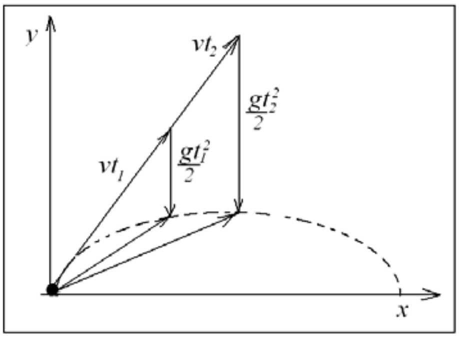
Изменяя скорость поступательного движения, мы изменяем положение оси вращения, однако угловая скорость остается неизменной. Этот вывод следует из картины сложения перемещений, которое также неоднозначно. Таким образом, мы всегда можем найти такое положение оси вращения, что данное перемещение твердого тела является следствием лишь вращательного движения. Скорость поступательного движения в этом случае будет равна нулю. Положение этой оси будет меняться с течением времени, поэтому ее называют мгновенной осью вращения [Хайкин, 1963].

Пусть колесо движется по дороги. Скорость поступательного движения оси колеса равна V. Требуется определить скорость точек *A, B, C* и *D*.



Перемещение любой точки обода колеса можно представить как вращение относительно оси, проходящей через точку D. Поэтому, скорость точки D равна нулю. Если скорость оси колеса, находящейся на расстоянии радиуса от точки D равна V, тогда скорость точки B равна $2V$ (это следует из постоянства угловой скорости для всех точек колеса). Аналогично определяются скорости точек A и C.

Любое движение можно представить как суперпозицию нескольких движений, не обязательно поступательного и вращательного. Примером может служить движение тела, брошенного под углом к горизонту. Действительно, параболическое движения тела в однородном поле можно рассматривать как последовательность равномерного прямолинейного движения тела, брошенного с некоторой начальной скоростью, и дальнейшего прямолинейного равноускоренного движения с ускорением силы тяжести. Оба движения происходят за одно и тоже время, и вообще говоря одновременно.



Фактически, мы просто представили вектор перемещения тела, как сумму двух векторов. Разумеется, такой представление неоднозначно и определяется из соображений удобства решения задачи.