

Элементарная теория колебаний

Содержание:

1. Линейные малые колебания систем с одной степенью свободы.
 - 1.1 Понятие колебательной системы. Незатухающие гармонические колебания с одной степенью свободы.
 - 1.2 Примеры идеальных колебательных систем.
 - 1.3 Затухающие колебания.
 - 1.4 Вынужденные колебания. Резонанс. Добротность колебательной системы.
2. Колебания систем с двумя степенями свободы.
 - 2.1 Понятие колебательных систем с двумя степенями свободы. Сложение колебаний, происходящих в одной плоскости. Биения.
 - 2.2 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.
3. Нелинейные колебания. Понятие о теории возмущений.
4. Параметрические колебания. Адиабатические инварианты.

Линейные колебания систем с одной степенью свободы.

Понятие колебательной системы. Незатухающие гармонические колебания с одной степенью свободы.

Колебаниями называется физический процесс, который точно или приблизительно повторяется с течением времени. Принято рассматривать не колеблющееся тело, а колебательную систему. Сами колебания могут иметь механическую или электромагнитную природу. Заранее оговорим, что и математическая теория и методы исследования для обоих этих видов колебаний совпадают.

В процессе колебаний, некоторая физическая величина (смещение материальной точки, электрический заряд и т.п.) меняется по некоторому закону. Задача теории колебаний – выявить закономерности и особенности этого процесса.

Рассмотрим подробнее механические колебательные системы. Пусть некоторая материальная точка m совершает колебательные движения. Этот процесс должен происходить под действием некоторой равнодействующей силы, приложенной к этой материальной точке, которая определяется по второму закону Ньютона (уравнению движения):

$$m\ddot{x} = f(x)$$

Чтобы сказать, как будет колебаться эта материальная точка, необходимо найти зависимость ее координаты от времени, то есть закон ее колебаний (закон движения). Решение этой задачи сводится к решению, приведенного выше, дифференциального уравнения второго порядка. Сила f может иметь весьма сложный вид, который приведет к появлению значительных сложностей при решении уравнения движения.

В тоже время, существует ряд важных, как в практическом, так и в теоретическом отношении, случаев, которые позволяют существенно упростить эту задачу. В математическом анализе показывается, что при выполнении ряда условий (в нашем случае

они всегда выполняются), функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы бесконечного ряда – ряда Тейлора:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$$

Теперь задача решения уравнения движения зависит от того, на каком члене ряда мы оборвем эту сумму, то есть какой порядок малости будет удовлетворять требованиям, предъявляемым к решению задачи.

Рассмотрим простейший случай – случай малых колебаний, в этом случае $xf'(0)$ – главный член разложения, все остальные члены, пропорциональные x^2 , x^3 и т.д. пренебрежимо малы. Тогда, уравнение движения примет вид:

$$m\ddot{x} = -xf'(0)$$

Знак минус появляется из-за того, что сила, под действием которой происходит колебательное движение, всегда направлена к положению равновесия. Введем следующие обозначения: $\frac{f'(0)}{m} = \omega_0^2$, тогда:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнение гармонических колебаний, а система, осуществляющая эти колебания – линейным или гармоническим осциллятором (если в разложении силы $f(x)$ участвуют последующие члены, то такая система называется ангармоническим осциллятором).

Перейдем к анализу этого уравнения, и прежде всего, помножим обе части уравнения на $\dot{x}$, тогда:

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x}x = |(\dot{x})^2 = 2\dot{x}\ddot{x}; (x)^2 = 2x\dot{x}| = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\dot{x})^2 + \omega_0^2 (x)^2) = 0$$

Последнее выражение говорит о том, что величина $(\dot{x})^2 + \omega_0^2 (x)^2$ не меняется со временем. Фактически, в этом выражении содержится закон сохранения энергии при колебаниях системы, описываемой с помощью уравнения гармонического осциллятора.

Пусть $(\dot{x})^2 + \omega_0^2 (x)^2 = \omega_0^2 (x_0)^2$, где $x_0 - const$, тогда:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega_0^2 (x)^2 &= \omega_0^2 (x_0)^2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \omega_0^2 (x^2 - x_0^2) \rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \omega_0 \sqrt{x^2 - x_0^2} \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} &= \pm \omega_0 dt \rightarrow \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right) = \pm \omega_0 t + const \\ \frac{x}{x_0} &= \cos(const \pm \omega_0 t) \\ x &= x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Последнее выражение говорит о том, что колебания системы будут происходить по гармоническому закону, то есть закону синуса или косинуса (отсюда и название – гармонический осциллятор).

Величина x_0 называется амплитудой колебаний. Амплитуда колебаний это максимальное отклонения колеблющейся величины от положения равновесия. $\omega_0 t + \varphi_0$ - фаза колебаний (конкретизирует гармонический закон); ω_0 - циклическая частота собственных колебаний ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, T -период колебаний); φ_0 - начальная фаза колебаний (амплитуда и начальная фаза определяются из начальных условий, то есть значений скорости и смещения в начальный момент времени).

Решение дифференциального уравнения колебаний можно искать и несколько иным образом:

$$x = Ae^{i\theta t} \rightarrow \dot{x} = i\theta Ae^{i\theta t}; \ddot{x} = -\theta^2 Ae^{i\theta t}$$

Тогда, подставляя это решение в уравнение колебаний, получим:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\theta^2 Ae^{i\theta t} + \omega_0^2 Ae^{i\theta t} = 0$$

$$-\theta^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \theta = \pm \omega_0$$

$$x = Ae^{i\theta t} = Ae^{\pm i\omega_0 t}$$

При условии: $\omega_0 \geq 0$, следует:

$$x = Ae^{i\omega_0 t} = |e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi| = A\cos(\omega_0 t)$$

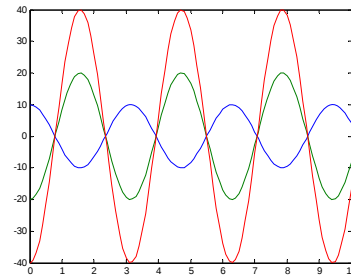
(здесь начальная фаза колебаний положена равной нулю).

Зная закон колебаний, можно получить законы изменения скорости и ускорения во времени:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$



На рисунке, представлены зависимости координаты, скорости и ускорения, для материальной точки, колеблющейся по закону: $x = 10\cos(2t)$. Из рисунка видно, что скорость опережает смещение на $\frac{\pi}{2}$, а ускорение опережает по фазе скорость на $\frac{\pi}{2}$, то есть ускорение опережает смещение на π .

Примеры идеальных колебательных систем.

Рассмотрим несколько «классических» колебательных систем. Одной из простейших колебательных систем является пружинный маятник. Пусть материальная точка массы m прикреплен к одному из концов пружины жесткости k , а другой конец пружины прочно прикреплен к неподвижной стенке. Если задать начальную деформацию пружины, то есть вывести эту системы из положения равновесия (или сообщить системе определенную потенциальную энергию), то система будет совершать малые колебания относительно положения равновесия, с периодом равным:

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Пусть массивное твердое тело подвешено в некоторой точке и совершает при этом колебательное движение в вертикальной плоскости, под действием силы тяжести. Найдем период этих колебаний.

В курсе статики было введено понятие момента силы: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, аналогично этому можно ввести понятие момента импульса: $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p} \right] + \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = \left[\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p} \right] = 0 \right] = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}$$

Таким образом, производная момента импульса по времени равна моменту внешних сил. На основе этого выражения можно сформулировать третий закон сохранения в механике – закон сохранения момента импульса: если момент внешних сил относительно некоторой точки равен нулю, то момент импульса относительно той же точки остается постоянным.

Момент импульса можно записать через такую интегральную характеристику тела, как момент инерции. Моментом инерции материальной точки относительно некоторой точки называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от материальной точки, до точки, относительно которой этот момент инерции вычисляется.

$$J = mr^2$$

Для твердого тела имеем: $J = \int \rho r^2 dV$. Тогда, принимая во внимание, что

$$L = rp = rmv = |v = \omega r| = mr^2\omega = J\omega$$

Напомним, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Тогда:

$$\dot{L} = J\dot{\omega} = J\ddot{\varphi} = M$$

Это выражение носит название основного уравнения вращательного движения. Запишем основное уравнение вращательного движения для твердого тела, совершающего колебательное движение в вертикальной плоскости.

$$J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

Будем считать, что тело совершает малые колебания, то есть отклоняется на малый угол, тогда $\sin\varphi \approx \varphi$, то есть:

$$J\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

Описанная колебательная система носит название физического маятника. Если вся масса маятника сосредоточена в одной точке, например, материальная точка подвешена на нити длины l , то такая система называется математическим маятником. Период колебаний математического маятника определяется выражением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = |J = mr^2| = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Математический маятник является частным случаем физического маятника. Рассмотрим еще одну колебательную систему. Пусть в некотором горизонтальном цилиндрическом сосуде длины l находится ν молей идеального газа. Сосуд разделен поршнем массы m , который может перемещаться в сосуде без трения, на две равные части. В некоторый момент времени поршень сместили относительно середины сосуда на расстояние x . Найдите период малых колебаний этой системы.

После того, как поршень сместили относительно положения равновесия, в одну из частей цилиндра, в ней образовалось избыточное давление, которое обеспечит существование возвращающей силы, под действием которой и будут осуществляться эти колебания. Так как газ идеальный, то к нему применимо уравнение Клапейрона – Менделеева. Запишем уравнение движения для поршня:

$$m\ddot{x} = -S(p_1 - p_2)$$

$$p_1 = \frac{\nu RT}{V_1} = \left| V_1 = S \left(\frac{l}{2} - x \right) \right| = \frac{\nu RT}{S \left(\frac{l}{2} - x \right)}$$

$$p_2 = \frac{\nu RT}{V_2} = \left| V_2 = S \left(\frac{l}{2} + x \right) \right| = \frac{\nu RT}{S \left(\frac{l}{2} + x \right)}$$

В этих выражениях учтено, что температура в обеих частях цилиндра не меняется, это условие хорошо выполняется для малых колебаний, то есть колебаний, при которых $x \ll l$. Производя выкладки, имеем:

$$m\ddot{x} = -S(p_1 - p_2) = -\frac{S\nu RT}{S} \left(\frac{1}{\left(\frac{l}{2} - x \right)} - \frac{1}{\left(\frac{l}{2} + x \right)} \right)$$

$$m\ddot{x} + \frac{2\nu RT}{\left(\frac{l}{2} \right)^2 - (x)^2} x = \ddot{x} + \frac{8\nu RT}{l^2 m} x = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 m}{8\nu RT}} = \pi l \sqrt{\frac{m}{2\nu RT}}$$

Следующий пример демонстрирует свойства силы трения. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся на встречу друг другу блока. Известно расстояние l между осями блоков и коэффициент трения k между стержнем и блоками. Такая система называется маятником Жуковского. Найдите период ее колебаний.

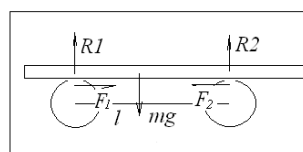
Прежде всего, запишем уравнение движения стержня в проекциях на ось Ox в момент времени, когда его отклонили на расстояние x .

$$m\ddot{x} = F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = k(R_1 - R_2)$$

Для того, чтобы стержень не вращался, необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов, относительно точки O , равнялась нулю:

$$(R_1 - R_2) \frac{l}{2} + mgx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{2kg}{l} x = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2kg}}$$



В самом начале мы отмечали, что излагаемая теория применима к любым колебательным системам, к настоящему моменту мы рассмотрели механические колебательные системы, где колеблющейся величиной была материальная точка или твердое тело. Рассмотрим теперь применение изложенного метода к электромагнитным процессам, где колеблющейся величиной является, например, заряд на обкладке конденсатора.

Рассмотрим электрическую цепь, которая состоит из катушки индуктивности L и конденсатора C , которые соединены параллельно с источником постоянного тока. Запишем для этой цепи второе правило Кирхгофа:

$$LI' + \frac{q}{C} = |I = q'| = Lq'' + \frac{1}{C}q = 0$$

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$$

Таким образом, используя правило Кирхгофа, мы пришли к уравнению того же вида, что и при использовании уравнения движения в механике, а именно к дифференциальному уравнению гармонических колебаний. Тогда, используя результаты, полученные ранее, делаем вывод о периоде колебаний электрического заряда в рассмотренной цепи (формула Томсона):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Затухающие колебания с одной степенью свободы

Во всех рассмотренных примерах выполнялся закон сохранения энергии, кинетическая энергия груза прикрепленного к пружине переходила в потенциальную энергию деформированной пружины. Колебания носили не только гармонический характер, но и являлись идеальными в том смысле, что в них отсутствовало затухание с течением времени, так как отсутствовали силы трения и сопротивления. Если рассматривать грузик на пружинке, который помещен в вязкую среду, то и уравнение движения и его решение – закон колебаний примут несколько иной вид. Рассмотрим это более подробно.

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2; \frac{b}{m} = 2\delta \rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

Будем искать решение в виде

$$x = Ae^{i\theta t} \rightarrow \dot{x} = i\theta Ae^{i\theta t}; \ddot{x} = -\theta^2 Ae^{i\theta t}$$

Тогда, подставляя это решение в уравнение колебаний, получим:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = -\theta^2 Ae^{i\theta t} + 2\delta i\theta Ae^{i\theta t} + \omega_0^2 Ae^{i\theta t} = 0$$

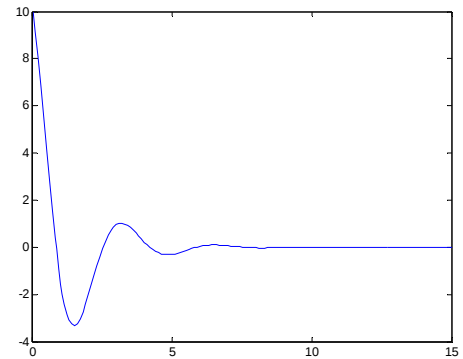
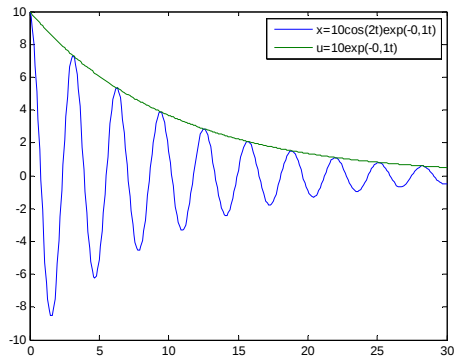
$$\theta^2 - 2\delta i\theta - \omega_0^2 = 0 \rightarrow \theta = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$x = Ae^{i\theta t} = Ae^{i(i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t} = Ae^{-\delta t} e^{\pm it\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Согласно формуле Эйлера: $e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, тогда:

$$x = Ae^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi_0\right); T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Последнее выражение показывает, что колебания начинают зависеть от свойств среды, в которой они осуществляются. Из закона движения видно, что с течением времени амплитуда колебаний уменьшается по экспоненциальному закону, более того, если коэффициент затухания δ окажется слишком большим, то говорить о каком – либо колебательном движении будет вообще неуместно.



Время, за которое амплитуда уменьшается в e раз, называется временем релаксации. Натуральный логарифм отношения амплитуд соседних максимумов называется логарифмическим декрементом затухания:

$$d = \ln \frac{X_1}{X_2} = \delta T; \tau = \frac{1}{\delta} - \text{время релаксации}$$

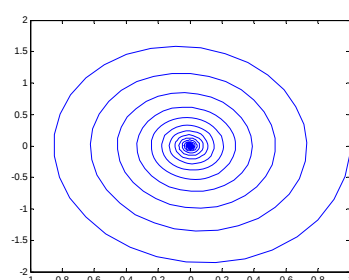
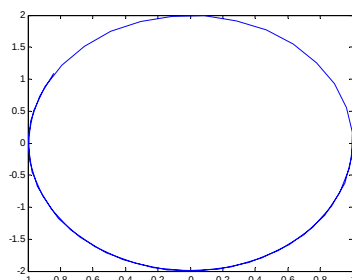
Число колебаний, которое совершает система за время релаксации равно $N = \frac{1}{\delta T} \rightarrow N = \frac{1}{d}$

$$\pi N = \frac{\pi}{d} - \text{добротность}$$

Добротность системы определяется как отношение энергии, выделившейся за период колебаний в системе, к энергии потерь, произошедших за этот период.

Разумеется, во всех реальных колебательных системах присутствуют силы трения и сопротивления, поэтому добротность колебательной системы – исключительно важная ее характеристика.

Парой колебательные системы исследуют не только по закону движения, но и зависимости импульса колеблющегося тела от координаты, или скорости от координаты. Такие зависимости называют фазовыми кривыми (фазовыми портретами), а координатные плоскости, в которых они построены – фазовыми плоскостями. На рисунках ниже приведены фазовые плоскости для двух колебательных систем: без затухания – эллипс и с затуханием. Отметим, что площадь этих кривых характеризует энергию колеблющегося тела (вывод этого факта автор предоставляет читателю).



Проиллюстрируем затухание гармонических колебаний, на примере колебательного контура, который содержит помимо катушки и конденсатора, еще и активное сопротивление, на котором выделяется джоулево тепло, то есть рассеивается энергия (наличие активного сопротивления играет в электрических цепях роль силы трения в механике). Как и ранее, запишем для такой системы второе правило Кирхгофа:

$$Lq'' + IR + \frac{1}{C}q = 0 \rightarrow q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\frac{R}{L} = 2\delta; \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

Используя введенные обозначения, а также повторяя все проделанные выкладки, можно получить закон затухающих гармонических колебаний для колебательного контура, содержащего активное сопротивление.

Вынужденные колебания. Резонанс. Добротность колебательной системы.

К настоящему моменту мы рассмотрели свободные незатухающие и свободные затухающие колебания. Термин свободные означает, что в некоторый момент колебательная система была выведена из положения равновесия (то есть ей сообщили некоторую энергию), после чего, система была предоставлена сама себе. В случае незатухающих колебаний в системе энергия сохранялась, поэтому амплитуда колебаний не менялась. В случае затухающих колебаний, энергия, запасенная в системе, расходовалась на работу по преодолению сил трения и сопротивления, вследствие чего амплитуда колебаний уменьшалась.

Перейдем теперь к вопросу о том, что будет происходить в колебательной системе, если на нее действует периодическая внешняя сила.

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = f(t)$$

С математической точки зрения, второй закон Ньютона в этом случае представляется как линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение такого уравнения может быть представлено как сумма решений аналогичного однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Пусть внешняя вынуждающая сила также меняется по гармоническому закону.

$$f(t) = f_0 \cos \omega t$$

Согласно формуле Эйлера ($e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$):

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = f_0 \cos \omega t = f_0 e^{i\omega t}$$

Будем искать частное решение в виде: $x = Ae^{i\omega t} \rightarrow \dot{x} = i\omega x; \ddot{x} = -\omega^2 x$

$$-\omega^2 x + 2\delta i\omega x + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega} e^{i\omega t} - \text{частное решение}$$

Тогда, общее решение, которое есть сумма частного решения и общего решения однородного уравнения, запишется в виде:

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega} e^{i\omega t} + A e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0)$$

Выбором амплитуды и начальной фазы колебаний можно удовлетворить любым начальным условиям. Как видно, решение уравнения вынужденных колебаний состоит из двух частей. Первая часть описывает свободные затухающие колебания линейного осциллятора, которые угаснут, по истечении некоторого времени (время определяется величиной времени релаксации колебательной системы), после чего будут происходить вынужденные колебания, с частотой равной частоте вынуждающей силы. При решении этого неоднородного уравнения предполагалось, что вынуждающая сила действует по гармоническому закону (мы смогли применить формулу Эйлера). Если это условие не выполняется, то тогда, функцию источника можно представить в виде суперпозиции гармонических функций, то есть в виде разложения в ряд Фурье. В этом случае задача сведется к предыдущей.

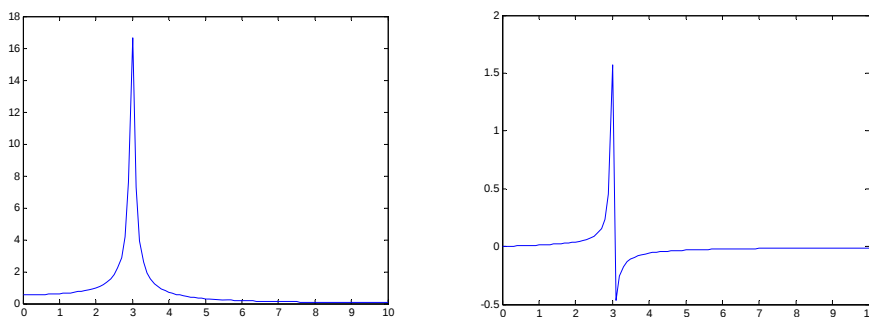
Первый член в решении неоднородного уравнения есть, вообще говоря, величина комплексная. Физический смысл же имеет лишь вещественная часть этого выражения.

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta i\omega = \rho e^{i\varphi} \rightarrow x = \frac{f_0}{\rho} e^{i(\omega t - \varphi)} = a \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \rho \cos \varphi; 2\delta i\omega = i \rho \sin \varphi$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\delta^2 \omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

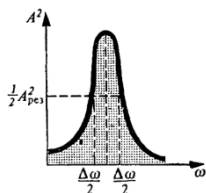
Таким образом, вынужденные колебания – гармонические колебания, амплитуда и фаза которых, определяется приведенными выражениями. Необходимо подчеркнуть, что амплитуда колебаний и фаза колебаний становятся функциями частоты. Зависимость амплитуды колебаний от частоты (амплитудно – частотная характеристика АЧХ) приведена на рисунке:



Данный график построен для следующей зависимости: $a = \frac{5}{\sqrt{9 - \omega^2 + 4 \cdot 0,05^2 \omega^2}}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \cdot 0,05 \omega}{9 - \omega^2}$. Отсюда видно, что если частота вынуждающей силы совпадает с частотой собственных колебаний системы, то наблюдается резкое возрастание амплитуды колебаний, это явление носит название резонанса. Явление резкого возрастания амплитуды можно проиллюстрировать и на фазово – частотной характеристике (ФЧХ).

Физически, явление резонанса состоит в том, что ускорение полностью создается упругой силой, а внешняя сила компенсирует силу трения. Важной характеристикой колебательной системы является добротность. Которая показывает интенсивность роста

амплитуды при резонансе. Принципиальное значение имеет не только та величина максимальной амплитуды, которая достигается при резонансе, но и интенсивность спада амплитудной кривой при небольших отклонения частоты вынуждающей силы от частоты собственных колебаний системы. Это свойство характеризуется понятием полуширины резонансной кривой и тесно связано с понятием добротности системы. Отметим, что полуширина определяется не относительно амплитуды колебаний, а относительно ее квадрата.



$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

При увеличении добротности системы возрастает резонансная амплитуда и уменьшается ширина резонансного максимума, но одновременно с этим увеличивается время установления вынужденных колебаний.

Колебания систем с двумя степенями свободы.

Понятие колебательных систем с двумя степенями свободы. Сложение колебаний, происходящих в одной плоскости. Биения.

Нами были рассмотрены малые свободные и малые вынужденные колебания с одной степенью свободы. Реальные колебательные системы, зачастую, обладают несколькими степенями свободы. Анализ таких систем приводит к необходимости решения задач о сложении колебаний происходящих как в одной плоскости, так и во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Рассмотрим случай сложения колебаний, происходящих в одной плоскости. Пусть пружинный маятник прикреплен к потолку вагона, а сам вагон стоит на пружинах и тоже совершает колебательное движение. Колебание материальной точки можно представить в виде вектора (это следует из того, что мы использовали комплексное представление колебаний через формулу Эйлера, а комплексное число – точка на плоскости), тогда, в случае совпадения частот, сложение колебаний сведется к сложению векторов. При совпадении частот, мы получаем новое колебание с другой амплитудой и той же частотой. Это легко показать, если воспользоваться формулами элементарной тригонометрии.

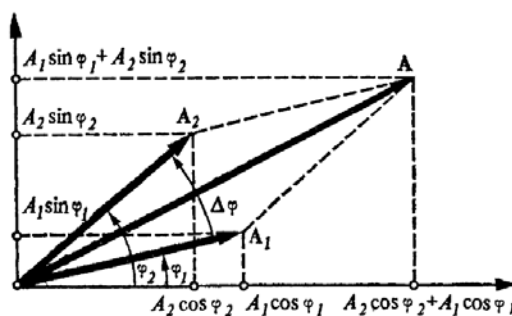
$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1);$$

$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2);$$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}$$

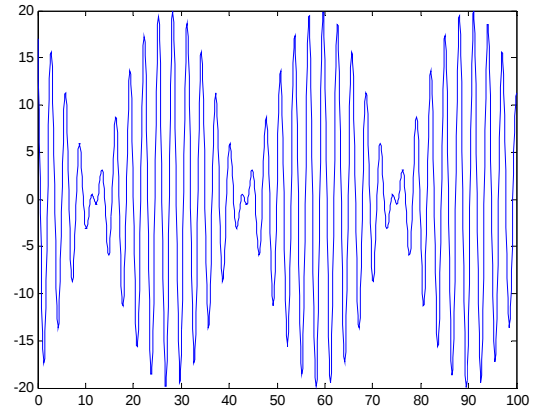


Несколько сложнее обстоит дело, если частоты колебаний отличаются на малую величину:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1);$$

$$x_2 = A_1 \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi_2);$$

$$x = x_1 + x_2 = 2A_1 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega t + \varphi);$$



Всегда можно подобрать момент времени так, чтобы начальная фаза одного из колебаний равнялась нулю. Как видно из рисунка, сложение двух колебаний, частоты которых различаются на малую величину, приводят к появлению биений. Частота биений определяется разницей между частотами складываемых колебаний.

Теперь рассмотрим систему, обладающую двумя степенями свободы, то есть систему, для определения которой необходимо задавать две независимые величины. Колебания таких систем можно представить как сумму взаимно перпендикулярных колебаний с одной степенью свободы. Траектория колеблющегося тела в таких системах имеет весьма сложный вид, который зависит от соотношения частот и начальных фаз обоих колебаний. Пусть шарик подвешен на пружинке в вертикальной плоскости, причем пружинка может колебаться подобно нити математического маятника. Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза одного из колебаний равнялась нулю, тогда для суммы этих ортогональных колебаний имеем:

$$x = a \cos(\omega_0 t);$$

$$y = b \cos(\omega_0 t + \varphi_2);$$

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega_0 t) \rightarrow \sin(\omega_0 t) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi_2) - \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi_2)$$

$$= \frac{x}{a} \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Выполняя несложные преобразования, окончательно имеем для уравнения траектории:

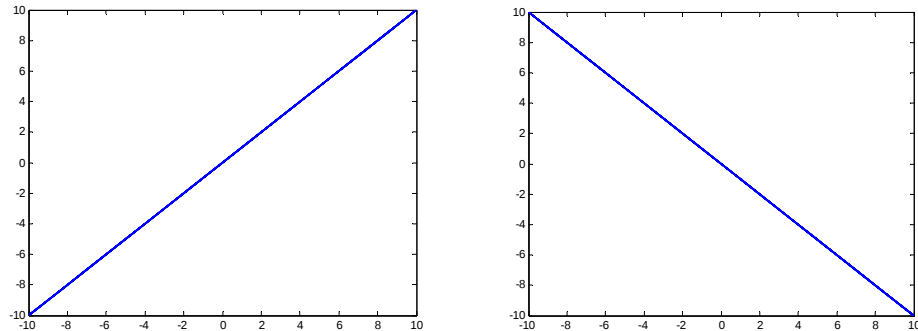
$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos(\varphi_2) = -\sin(\varphi_2) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos(\varphi_2)\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cos^2(\varphi_2) - 2 \frac{y}{b} \frac{x}{a} \cos(\varphi_2) = \sin^2(\varphi_2) \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

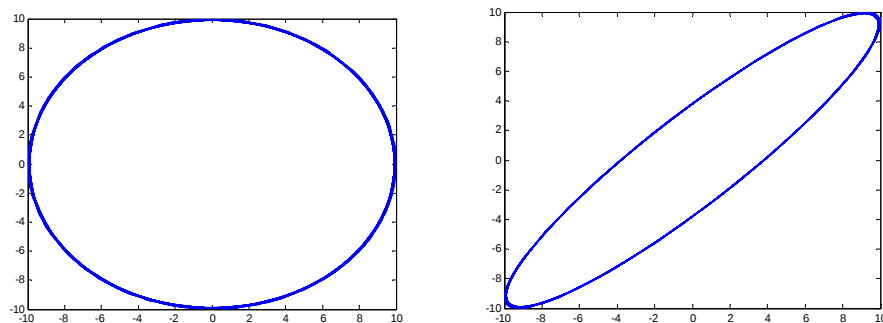
$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 (\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)) - 2 \frac{y}{b} \frac{x}{a} \cos(\varphi_2) = \sin^2(\varphi_2)$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{yx}{ba}\cos(\varphi_2) = \sin^2(\varphi_2)$$

Это уравнение – уравнение эллипса, оси которого ориентированы произвольно относительно координатных осей. Ориентация осей зависит от амплитуд и разности фаз складываемых колебаний. В частности, если разность фаз будет равна нулю или $\pm\pi$, то система будет совершать гармонические колебания вдоль прямой, проходящей через начало координат (траектории представлены на рисунке).

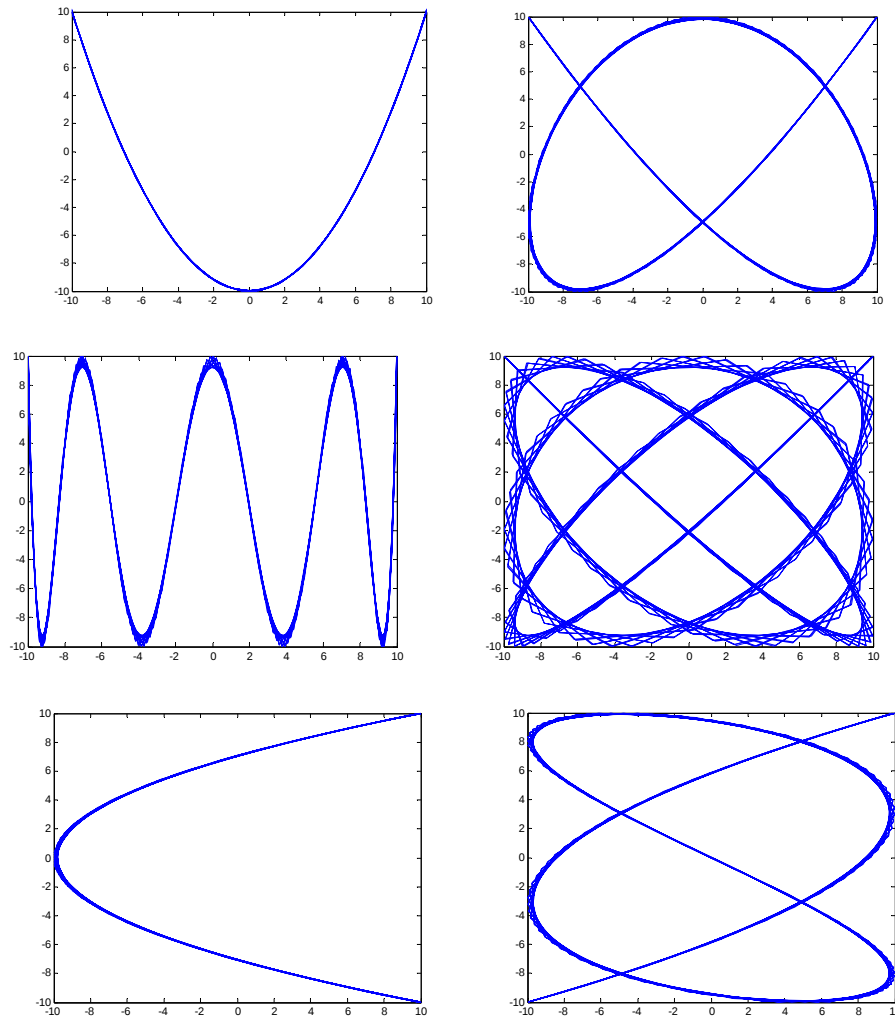


Если разность фаз равна $\pm\pi/2$, то эллипс приводится к координатным осям, причем полуоси эллипса равны амплитудам соответствующих колебаний. Знаки плюс или минус соответствуют различным направлениям движения колеблющегося тела по эллипсу: если разность фаз положительна, то движение осуществляется по часовой стрелке, если разность фаз отрицательна, то движение происходит против часовой стрелки. В том случае, когда разность фаз не принимает упомянутых крайних значений, траектория представляется некоторым эллипсом, ориентация и сжатие которого зависит от разности фаз и амплитуды. Соответствующие траектории представлены на рисунке ниже.



Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

Все рассмотренные случаи соответствовали ситуации, когда частоты складываемых колебаний одинаковы. Разумеется, на практике мы встречаемся с ситуациями, когда частоты складываемых колебаний не совпадают. Траектория колеблющегося тела в этом случае имеет весьма сложный вид, который носит название фигур Лиссажу. На рисунках ниже приведены некоторые примеры фигур Лиссажу (соотношения частот: 1:2; 3:4; 1:8; 7:8; 4:2; 5:3 соответственно). Отметим, что чем ближе отношение частот складываемых колебаний к единице, тем сложнее вид фигуры Лиссажу. Траектория, по которой движется колеблющееся тело, при сложении столь сложных колебаний, может оказаться и не замкнутой.



Нелинейные колебания. Понятие о теории возмущений.

До настоящего момента мы рассматривали малые колебания, то есть ограничивались первым членом в разложении вынуждающей силы в ряд Тейлора. Рассмотрим теперь вопрос, о том, как исследуются колебательные системы, в которых колебания нельзя считать малыми. Добавим еще один член разложения, а члены пропорциональные третьей и более высоким степеням будем считать малыми.

$$m\ddot{x} = -xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0)$$

$$-\frac{f'(0)}{m} = \omega_0^2; \quad \frac{f''(0)}{2\omega_0^2 m} = -\frac{f''(0)}{2f'(0)} = \varepsilon$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0^2 x^2$$

Величина ε является параметром малости квадратичного члена, его называют возмущением, а сам метод анализа колебательных систем, основанный на введении этого параметра — теорией возмущений. Решение приведенного уравнения, в котором возмущение равно нулю, называется невозмущенным решением и соответствует гармоническому закону колебаний. Решение же нелинейного уравнения строится как решение однородного уравнения плюс добавка, соответствующая возмущению.

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + x_1(t)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $x_1(t)$ также должна стремиться к нулю ($|x_1(t)| \ll x_0$), тогда, подставляя решение в уравнение движения, находим условие на добавку, соответствующую возмущению:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \varepsilon \omega_0^2 (x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + 2x_0 x_1 \sin(\omega_0 t) + x_1^2)$$

Так как второе и третье слагаемые в скобках много меньше первого, то ими можно пренебречь:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \varepsilon \omega_0^2 x_0^2 (\sin^2(\omega_0 t)) = \varepsilon \omega_0^2 x_0^2 \frac{(1 - \cos(2\omega_0 t))}{2}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде: $x_1 = a_1 + b_1 \cos(2\omega_0 t)$, тогда:

$$\omega_0^2 a_1 + b_1(-4\omega_0^2 + \omega_0^2) \cos(2\omega_0 t) = \frac{\varepsilon x_0^2}{2} \omega_0^2 - \frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} x_0^2 \cos(2\omega_0 t)$$

Это равенство должно выполняться для всех моментов времени, поэтому коэффициенты уравнения в левой и правой частях равенства должны быть равны друг другу.

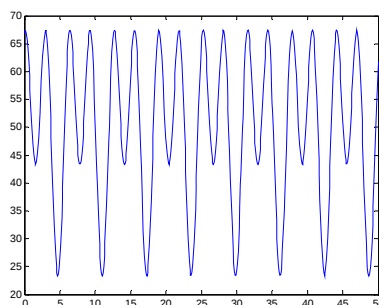
$$b_1(-4\omega_0^2 + \omega_0^2) = -\frac{\varepsilon \omega_0^2}{2} x_0^2 \rightarrow b_1 = \frac{\varepsilon x_0^2}{6}$$

$$\frac{\varepsilon x_0^2}{2} = a_1$$

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + x_1(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + a_1 + b_1 \cos(2\omega_0 t)$$

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2 + \frac{1}{6} \varepsilon x_0^2 \cos(2\omega_0 t)$$

Принципиально важно то, что в решении появился член, содержащий удвоенную частоту (вторую гармонику). Причиной его появления, стали нелинейные эффекты, проявившиеся в системе с появлением квадратичного члена. Учет членов более высокого порядка малости приведет к появлению более высоких гармоник в решение уравнения движения. Из решения также видно, что колебания будут смещены относительно точки $x = 0$, на величину $\frac{1}{2} \varepsilon x_0^2$. Причиной этого смещения является тот факт, что слагаемое, пропорциональное квадратичному члену всегда имеет одно и то же направление (не меняет знак во времени), что неизбежно приводит к смещению положения равновесия колебательной системы. Нелинейность колебаний проявляется в появление высших гармоник, причем четные гармоники приводят к смещению положения равновесия. Какие гармоники будут проявляться, зависит лишь от нелинейных свойств вынуждающей силы. На рисунке ниже приведена зависимость смещения от времени, с учетом первых двух гармоник.



Параметрические колебания. Адиабатические инварианты.

Все рассмотренные колебательные системы линейные и нелинейные, с одной или двумя степенями свободы, с затуханием или без затухания были замкнуты. Параметры системы не менялись во времени (жесткость пружины не менялась, длины нити маятника так же оставалась неизменной). Колебания, во время которых меняется один или несколько параметров колебательной системы, называются параметрическими. Среди всего множества изменения внешних параметров особую роль играют медленные (адиабатические) изменения. При этом, эти параметры, как бы медленно они не менялись, могут принимать любые значения из допустимого интервала.

Функции координат, скоростей и параметров системы, остающиеся постоянными при бесконечно медленных изменениях параметров, называются адиабатическими инвариантами. Медленность изменения параметров означает, прежде всего, то, что несмотря на изменение параметра, движение по-прежнему будет носить колебательный характер. Запишем выражение для полной энергии гармонического осциллятора.

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \rightarrow \dot{E} = mv\dot{v} + kx\dot{x} + \frac{x^2}{2}\dot{k}$$

$$mv\dot{v} + kx\dot{x} = |\dot{x} = v; F = -kx = m\dot{v}| = 0$$

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \rightarrow \dot{E} = U(x)\frac{\dot{k}}{k}$$

Требование медленности, которое мы сформулировали, является классическим, но недостаточным. Необходимо потребовать, чтобы за каждый период величина $\frac{\dot{k}}{k}$ почти не менялась, то есть:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 (1 + \alpha); \alpha \rightarrow 0 \text{ при } \dot{k} \rightarrow 0$$

$$\Delta E = E(t+T) - E(t) = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 \left[\int_t^{t+T} U(x(t')) dt' + \beta \right]$$
$$\beta \rightarrow 0 \text{ при } \dot{k} \rightarrow 0$$

При вычислении этого интеграла можно считать, что величина k практически не меняется. Тогда,

$$\Delta E = \frac{\dot{k}}{k} \int_t^{t+T} U(x(t')) dt'$$

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0); U = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{E}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + \varphi_0)]$$

$$\int_0^T U dt = \frac{E}{2} \int_0^T [1 + \cos(2\omega_0 t + \varphi_0)] dt = \frac{ET}{2}$$

$$\Delta E = \frac{\Delta k}{k} E \rightarrow \frac{dE}{E} - \frac{dk}{2k} = 0$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const}; ET = \text{const}; \frac{E}{\omega} = \text{const};$$

Это означает, что эти величины для гармонического осциллятора являются адиабатическими инвариантами. При укорочении длины нити математического маятника период его колебаний уменьшается, однако полная энергия возрастает так, что величина ET остается постоянной.

Литература:

Матвеев А.Н. Механика и теория относительности.
Сивухин Д.В. Общий курс физики.
Иродов И.Е. Основные законы.
Савельев И.В. Курс общей физики.
Пинский А.А. Основы физики.