

Законы сохранения

Содержание

1. Работа и энергия
2. Теорема о кинетической и потенциальной энергиях
3. Понятие КПД и мощности
4. Суть законов сохранения
5. Законы сохранения их вывод и применимость.

Работа и энергия

В повседневной жизни нам часто приходится делать выбор между тем, какую силу приложить к данному телу, чтобы, к примеру, переместить его на некоторое расстояние. Пусть в данном случае источниками сил будут взрослый спортсмен и ребенок. Чтобы им перенести сумку определенного веса на 1 метр им надо приложить одно и то же усилие. В чем же заключается выбор источника силы в данном случае? Переноса сумку на одно и то же, расстояние человек и ребенок должны прилагать одно и то же усилие, но очевидно, что взрослый человек сможет пронести сумку на большее расстояние, чем ребенок.

Данный пример указывает на необходимость введения некоторой физической величины, которая позволяла бы сравнивать источники силы. Такая физическая величина называется работой.

Элементарной работой называется скалярное произведение силы на перемещение точки приложения силы.

$$dA = \vec{F} \vec{s} = F ds \cos \alpha$$

α - угол между векторами силы и перемещения.

Суммируя работу, по всем элементарным перемещениям (или интегрируя обе части уравнения) приходим к выражению,

$$A = \int_L F dr$$

Теперь мы можем сделать выбор между взрослым человеком и ребенком в пользу взрослого человека, так как он может совершить большую работу, чем ребенок.

Чем же объясняется, что одна сила совершает большую работу, чем другая? Энергией называется скалярная физическая величина характеризующая способность тела совершать работу. То есть, я могу утверждать, что если одно тело обладает большей энергией, чем другое, то при воздействии на другое тело оно совершит большую работу.

Выделяют два вида энергии: кинетическую энергию (энергию движения) и потенциальную энергию (энергию взаимодействия).

Кинетической энергией тела называется такая работа, которую может совершить тело вплоть до полной остановки. Кинетическая энергия присуща данному телу. Потенциальная энергия – энергия взаимодействия и характеризует не одно тело, а систему тел. Потенциальной энергией называется работа, которую может совершить система тел при изменении конфигурации системы (взаимного расположения).

Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием силы F , из положения 1 в положение 2. Согласно уравнению движения:

$$m \frac{dv}{dt} = F; \quad v m \frac{dv}{dt} = \left| x \dot{x} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2) \right| = \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} = Fv$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt} = F \frac{dx}{dt}; \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fdx = dA$$

Вычислим работу A , которую необходимо совершить силе F , чтобы осуществить это перемещение.

$$A = \int_{v_0^2}^{v_1^2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Величину $\frac{mv^2}{2}$ обозначим как кинетическую энергию, тогда изменение кинетической энергии материальной точки равно работе,

совершенной внешней **потенциальной** силой, по перемещению этой материальной точки из начального положения в данное положение.

В этом положении заключается теорема о кинетической энергии.

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$$

В математическом анализе доказываются две теоремы, которые понадобятся нам в дальнейшем:

1. Для того чтобы криволинейный интеграл не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот же интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.
2. Для того чтобы криволинейный интеграл не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы его подынтегральное выражение было полным дифференциалом.

Вычислим теперь ту же работу, используя определение работы. В первом случае, будем перемещаться из точки 1 в точку 2 по кривой L_1 , а во втором – по кривой L_2 . В обоих случаях мы получим один и тот же результат, так как работа по перемещению материальной точки из положения 1 в положении 2 равна изменению кинетической энергии этой материальной точки и не зависит от пути ее перемещения.

$$A = \int_{L_1} F dr = \int_{L_2} F dr = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Тогда, если мы станем вычислять работу, по перемещению материальной точки из положения 1 в положение 2, а затем обратно в положение 1, то есть рассмотрим перемещение материальной точки по замкнутому контуру, мы получим ноль.

Так как контур был выбран произвольно, то на основании первой теоремы можно утверждать, что работа силы F , по перемещению материальной точки из начального положения в конечное, не зависит от пути, по которому это перемещение осуществляется.

Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а зависит лишь от начального и конечного положений тела, а также, работа которых на замкнутом контуре равна нулю, называются потенциальными.

На основании второй теоремы, можно утверждать, что выражение Fdr является полным дифференциалом некоторой функции, которую мы назовем потенциальной энергией, то есть:

$$dU = -Fdr$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Здесь же отражен тот факт, что работа потенциальной силы равна изменению потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком. Это утверждение составляет теорему о потенциальной энергии.

Нашим результатам можно предать более строгую математическую формулировку, отвлекаясь от конкретики нашего случая.

Итак, работа силового поля, заданного силой

$$\vec{F} = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k}$$

определяется интегралом

$$A = \int_L F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$$

и не зависит от пути интегрирования, если

$$\frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial y}$$

Такое силовое поле называется потенциальным, а функция $U = U(x, y, z,)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом, называется потенциалом силового поля. Работа, совершенная в потенциальном поле, равна разности потенциалов в конечном и начальном положениях. Приведем примеры силовых полей и их потенциалов.

Некоторые потенциальные поля

1. Гравитационное поле.

В гравитационном поле сила взаимодействия между двумя точечными массами, находящимися на расстоянии r друг от друга, определяется на основании закона Всемирного тяготения Ньютона:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

Выберем оси так, чтобы ось OX была направлена по прямой, соединяющей материальные точки, а две другие оси ортогонально этой прямой. В таком случае:

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{x^2} \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} G \frac{Mm}{x^2} dx = -G \frac{Mm}{x_2} + G \frac{Mm}{x_1} = GMm \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия определяется выражением:

$$U = -G \frac{Mm}{x} + C$$

Константа C , определяется из условия нормировки, то есть выбора такого положения, при котором потенциальная энергия

считается нулевой. Нормировка производится произвольным образом, из соображений удобства решения задачи. Произвол в выборе нулевого уровня потенциальной энергии говорит о том, что физический смысл имеет не сама потенциальная энергия, а ее изменение, которое определяет работу, совершенную в потенциальном поле.

2. Электрическое поле точечного заряда.

Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами определяется по закону Кулона:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \vec{r}$$

Для наглядности, выберем координатные оси произвольным образом, тогда:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \frac{x}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \frac{y}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \frac{z}{r}$$

Модуль радиус – вектора $\vec{r}$ определяется по теореме Пифагора:
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Проверим, выполняются ли условия потенциальности, то есть верны ли равенства

$$\frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial y} = \frac{F_y(x, y, z)}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial z} = \frac{F_z(x, y, z)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial z} = \frac{F_z(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} \right) = \frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \right)$$

Производная находится, как производная сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial y}(r^{-3}) = -3r^{-4} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{\frac{1}{2}-1} 2y \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r} \end{aligned}$$

В силу симметрии функции r относительно ее аргументов:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Тогда,

$$\frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{3Qqxy}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

Аналогично вычисляется производная $\frac{F_y(x, y, z)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial x} = -\frac{3Qqxy}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial y}$$

Читатель сам может убедиться, что оставшиеся равенства в условии потенциальности также выполняются. Таким образом, мы можем утверждать, что электростатическое поле точечного заряда потенциально, как и гравитационное поле.

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия двух точечных зарядов будет определяться выражением:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

Работа различных сил

Прежде чем вычислять работу конкретных сил, произведем некоторую классификацию систем тел и сил, действующих на эти системы.

Прежде всего, будем выделять изолированные, замкнутые и открытые системы. Изолированные системы тел – системы, на которые не действуют внешние силы. (то есть система существует лишь под действием внутренних сил системы). Конечно же таких систем не существует и они являются лишь моделями, как и инерциальные системы отсчета.

Замкнутыми называются системы тел, на которые не действуют внешние силы или их действие скомпенсировано.

Открытыми называются системы тел, которые находятся под действием внешних сил, результирующая которых отлична от нуля.

Силы, работа которых на замкнутой траектории (перемещение равно нулю) равна нулю и не зависит от формы траектории, называются потенциальными.

Потенциальные силы, значение и направление которых, не меняется с течением времени, называются консервативными.

В противном случае, силы называют неконсервативными. Выделяют два вида неконсервативных сил: диссипативные силы (рассеивающие энергию) и гироскопические силы.

Теперь, получим расчетные выражение, полезные при решении задач. Потенциальная энергия деформированной пружины.

$$A = \int F dx = \int kx dx = \frac{kx^2}{2} + const$$
$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Работа силы тяжести, в предположении о постоянстве значения ускорения силы тяжести:

$$A = \int_{h_1}^{h_2} mg dx = mg(h_2 - h_1)$$

В случае если изменение высоты столь значительно, что необходимо учитывать изменение значения ускорения силы тяжести, работа будет определяться выражением:

$$A = \int_{h_1}^{h_2} mg(x)dx = \left| g(x) = \frac{GM_3}{(R_3 + x)^2} \right| = \int_{h_1}^{h_2} G \frac{M_3 m}{(R_3 + x)^2} dx$$

$$= M_3 m G \int_{h_1}^{h_2} \frac{dx}{(R_3 + x)^2}$$

Сделаем замену переменных: $R_3 + x = y$; $dx = dy$, а после интегрирования вернемся к старым переменным:

$$A = M_3 m G \left(\frac{1}{R_3 + h_1} - \frac{1}{R_3 + h_2} \right)$$

Работа силы Архимеда, для тела полностью помещенного в жидкость или газ.

$$A = \int_{h_1}^{h_2} \rho_f g V_f dx$$

Здесь ρ_f - плотность жидкости или газа, в которую помещено тело, V_f - объем вытесненной жидкости или газа (объем тела, если тело погружено в среду полностью). Вычисление работы силы Архимеда связано с двумя предположениями: во-первых, будем считать, что плотность жидкости не меняется с глубиной (это предположение, как правило, не выполняется для газов), во-вторых, будем считать, что ускорение силы тяжести, также не зависит от глубины.

$$A = \int_{h_1}^{h_2} \rho_f g V_f dx = \rho_f g V_f (h_2 - h_1)$$

Вопрос о том, как может меняться плотность жидкости или газа с изменением высоты, в поле силы тяжести, будет рассмотрен позднее.

Работа силы Лоренца. $A = \int_{h_1}^{h_2} q[vB]dx = 0$

Законы сохранения

Уравнение движения позволяет решить основную задачу механики в общем виде. Однако, это решение может быть весьма сложным. В самом простейшем случае, (когда силы, действующие на тело, постоянны во времени) это уравнение – дифференциальное уравнение второго порядка. Большой прогресс в современной вычислительной технике позволил решить огромный круг задач, который раньше был неразрешим, но до сих пор остаются классы задач, не поддающиеся ни аналитическому, ни численному решениям.

Одновременно с этим, было установлено, что физические процессы протекают так, что значение ряда физических величин всегда остается неизменным. Эти величины, которым соответствуют свои законы сохранения, позволяют сделать ряд выводов о характере движения, не решая уравнения движения.

Законы сохранения могут быть получены из уравнения движения и свойств пространственно – временной симметрии, поэтому в них содержится не больше информации, чем в самих уравнениях движения.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере. Пусть имеются три точечных массы, расположенные в вершинах равностороннего треугольника. Каждая масса несет на себе заряд q . Массы соединены непроводящими невесомыми и нерастяжимыми нитями. Под действием силы Кулона, нити натянуты. В некоторый момент времени одну из нитей пережигают. Определить, каким будет ускорение центральной массы в начальный момент времени. На первый взгляд, задача чисто динамическая, можно записать для центрально груза второй закон Ньютона. Однако, при более внимательном рассмотрении видно, что в процессе движения, силы, действующие на центральную массу, непрерывно меняются. В данном случае, изменения происходят как во времени, так и в пространстве. Уравнение движения становится не алгебраическим, а дифференциальным. В этом случае, на много эффективнее использовать законы сохранения энергии и импульса, к выводу которых мы и переходим.

Закон сохранения энергии.

Следствием второго закона Ньютона является теорема о кинетической энергии, согласно которой:

$$A_{12} = E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1}$$

Будем рассматривать материальную точку, движущуюся под действием потенциальной силы, проекции которой могут быть получены следующим образом:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Потенциальная функция U , функция не только координат, но и времени:

$$U = U(x, y, z, t)$$

Запишем работу, которую производят действующие на материальную точку силы, при ее перемещении вдоль, некоторой траектории, из положения 1 в положение 2.

$$dA_{12} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)$$

$$A_{12} = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)$$

Прибавим и вычтем под знаком интеграла величину $\frac{\partial U}{\partial t} dt$, тогда получим полный дифференциал потенциальной функции:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$A_{12} = -\int \left(dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt\right) = -\int dU + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Заметим, что в таком виде, выражение для работы, справедливо и для системы материальных точек.

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int \frac{\partial U}{\partial t} dt = E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1}$$

$$(U_1 + E_{\text{кин}1}) - (U_2 + E_{\text{кин}2}) = \int \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Предположим теперь, что наша система замкнута. Тогда, ввиду однородности времени функция $U = U(x, y, z, t)$ не может явно зависеть от времени, и $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$.

$$(U_1 + E_{\text{кин}1}) - (U_2 + E_{\text{кин}2}) = 0$$

$$U_1 + E_{\text{кин}1} = \text{const}$$

Полная механическая энергия замкнутой системы тел, в которой действуют лишь потенциальные силы, остается неизменной.

Закон сохранения импульса.

Пусть механическая система замкнута, тогда все силы, действующие на систему, являются внутренними. Перенесем систему из одного положения в другое так, чтобы все ее материальные точки претерпели одно и то же смещение, а их скорости остались прежними по величине и направлению. Ввиду однородности пространства такое перемещение не требует затраты работы.

$$(F_1 + F_2 + \dots)r = 0$$

$$F_1 + F_2 + \dots = 0$$

Но, согласно второму закону Ньютона в импульсном представлении:

$$\frac{dp}{dt} = F \rightarrow \frac{d}{dt}(p_1 + p_2 + \dots) = 0$$

$$p_1 + p_2 + \dots = \text{const}$$

Таким образом, свойство однородности пространства позволило нам получить, в предположении о замкнутости системы, закон сохранения импульса.

Закон сохранения момента импульса.

Вычислим производную момента импульса по времени. Выкладки будем производить для одной материальной точки, так как они легко могут быть обобщены на систему материальных точек.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}[r \times p] = \left[\frac{dr}{dt} \times p \right] + \left[r \times \frac{dp}{dt} \right] = 0 + M$$

Теперь нам необходимо доказать, используя изотропию пространства, что сумма моментов внутренних сил, действующих в системе материальных точек равна нулю.

Пусть система замкнута, и даны моменты внутренних сил относительно некоторого неподвижного начала. Повернем всю систему вокруг этой точки на малый угол $\delta\varphi$ так, чтобы скорости повернулись на тот же угол, не изменив своей величины. Так как пространство изотропно, такой поворот не требует совершения работы, а значит:

$$(M_1 + M_2 + \dots)\delta\varphi = 0$$

$$M_1 + M_2 + \dots = 0$$

Таким образом, в замкнутой системе суммарный момент импульса остается неизменным, если суммарный момент внешних сил равен нулю.

Мы пришли к теореме Нетер, согласно которой, каждому принципу пространственно – временной симметрии соответствует свой закон сохранения:

Закон сохранения	Принцип пространственно – временной симметрии
Закон сохранения энергии	Однородность времени
Закон сохранения импульса	Однородность пространства
Закон сохранения момента импульса	Изотропность пространства

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Специализированный учебно – научный центр
им. А.Н. Колмогорова

«Законы сохранения в механике»

Москва – 2010

