

Динамика

Содержание:

1. Законы Ньютона.
2. Статика.
3. Закон Всемирного тяготения. Гравитация. Вес тела.
4. Законы Кеплера.
5. Сила трения.
6. Природа упругости и пластичности.

Законы Ньютона

В основе динамики лежат законы Ньютона и законы, описывающие индивидуальные свойства сил. На протяжении тысячелетий человечество искало связь между силой и скоростью. И только Ньютон поставил перед собой задачу найти связь между силой и изменением скорости, то есть ускорением. Эта задача была решена с помощью законов Ньютона.

Первый закон Ньютона, в частной форме, был сформулирован еще Галилеем. Суть закона сводится к следующему: тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют другие тела. В действительности этого добиться невозможно, но можно максимально приблизиться к данной картине. В чем же заключается частный характер формулировки Галилея? Во-первых, действие нескольких сил может быть скомпенсировано, во-вторых, существуют электромагнитные силы, которые могут оказывать воздействие на данное тело не по средствам взаимодействия тел, а по средствам силового поля.

Принципиальным становится вопрос и о выборе системы координат и системы отсчета. В разных системах отсчета движение выглядит по-разному.

Если тело движется равномерно и прямолинейно в системе «К», то в системе «К'», которая движется ускоренно, по отношению к системе «К», это движение примет совсем другой характер. Поэтому, закон инерции (первый закон Ньютона) вообще теряет всякий смысл, без указания системы отсчета. Классическая механика постулирует:

Существуют инерциальные системы отсчета, в которых все свободные тела движутся равномерно и прямолинейно, пока и поскольку на них не действуют другие тела, или их действие скомпенсировано.

Инерциальными называются системы отсчета, которые покоятся или движутся с постоянной скоростью по отношению к удаленным звездам. Тела, на которые не действуют другие тела или их действие скомпенсировано, называются свободными. Отметим, что это утверждение является громадным обобщением опытных фактов [Сивухин; 1979].

Подчеркнем, что первый закон Ньютона лишь постулирует существование инерциальных систем отсчета, но не определяет их!

На основании опытных фактов можно заключить, что сообщить ускорение большому камню гораздо труднее, чем сообщить тоже ускорение маленькому мячику. Отсюда можно заключить, что все тела сопротивляются изменению их скорости по-разному. Свойство тел сопротивляться изменению их скорости называется инертностью тел. Мера инертности тела называется массой.

Проблема выбора системы отсчета принимает далеко не тривиальный характер. С одной стороны звезды на небесном своде располагаются на огромных расстояниях друг от друга, поэтому их можно считать свободными, с другой стороны, в системе отсчета связанной с Землей они имеют огромные центростремительные ускорения и поэтому, не могут являться инерциальными системами отсчета. Земля также имеет центростремительное ускорение при вращении вокруг Солнца, поэтому её также нельзя считать инерциальной системой отсчета, но в некоторых задачах этим фактом можно пренебречь.

Что же заставляет тело менять свою скорость? Изменение скорости тела обусловлено действием на него другого тела или поля. Мерой этого действия является сила. *Сила* – векторная физическая величина, характеризующая меру взаимодействия двух тел. Под полем мы будем понимать особый вид материи, отличающийся от вещества, по средствам которого осуществляется взаимодействие. Выделяют четыре типа взаимодействия: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное (перечисление ведется по мере убывания интенсивности взаимодействия). В механике рассматривается лишь гравитационное взаимодействие.

Согласно *второму закону Ньютона*, в инерциальных системах отсчета изменение скорости материальной точки пропорционально векторной сумме всех сил, действующих на эту точку.

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

Иными словами тело будет иметь такое ускорение, которое определяется действием определенного набора сил. Если кинематика отвечала на вопросы где и когда окажется тело в определенный момент времени, то динамика отвечает на вопрос – почему оно там окажется. Вместе, кинематика и динамика, образуют причинно – следственную связь механики. Вторым законом Ньютона часто называют уравнением движения, так как для того, чтобы из него получить закон движения необходимо решить дифференциальное уравнение второго порядка.

Обобщая экспериментальные факты можно говорить о том, что силу может определять не только изменение скорости, но и изменение массы. Этот эффект широко используется в теории реактивного движения. Математически он представлен вторым законом Ньютона, записанным в

импульсном представлении. Импульсом тела $\vec{p}$ называется векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость.

$$\vec{p} = m\vec{v}; \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

Мы привели формулировку, применимую к решению задач, хотя если быть более корректным, то необходимо различать импульс тела $m\vec{v}$ и импульс силы $\vec{F}\Delta t$. Импульс силы равен изменению импульса тела, отсюда следует справедливость приведенных выражений.

Если система состоит из совокупности материальных точек, каждая из которых имеет свою скорость (скорости могут различаться как по величине, так и по направлению), то импульс системы равен векторной сумме импульсов отдельных материальных точек.

Из последней формулы видно, что изменение импульса может определяться изменением скорости тела, тогда мы имеем классическую формулировку, а может изменением массы тела. В общем случае могут иметь место оба варианта одновременно.

Импульс тела – фундаментальная физическая величина, для которой справедлив свой закон сохранения. Если система тел является замкнутой, то ее импульс остается неизменным. Под замкнутой системой тел понимается система, на которую не действуют внешние силы, или их действие скомпенсировано.

Рассмотрим более подробно случай, когда изменяется масса тела. Пусть, по горизонтальной дороге, движется поливалка массы M , которая выбрасывает воду с определенным расходом μ и скоростью c . В момент времени, когда поливалка выбрасывает воду, изменяется импульс системы поливалка – вода. Начинает работать закон сохранения импульса, так как система является замкнутой. В результате. Поливалка получает импульс, направленный в противоположную сторону по отношению к импульсу выброшенной воды. Рассчитаем это движение. Изменение импульса поливалки определяет импульс силы:

$$\begin{aligned} dp &= Fdt \\ dp &= (M - \mu dt)(v + dv) + \mu dt(v + c) - Mv = \\ &= Mv + Mdv - \mu vdt - \mu dt dv + \mu vdt + \mu cdt - Mv \end{aligned}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, имеем:

$$Mdv + \mu cdt = Fdt$$

Преобразуя, приходим к уравнению Мещерского:

$$M \frac{dv}{dt} = F - \mu c$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть имеется ракета массы M , а dM - масса выбрасываемого топлива. Масса ракеты будет непрерывно меняться, за счет выброса топлива. Найдем зависимость скорости ракеты от ее массы.

По закону сохранения импульса:

$$-M \frac{dv}{dt} = u \frac{dM}{dt} \rightarrow \frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u}$$

Интегрируя, приходим к формуле К.Э. Циолковского:

$$\int \frac{dM}{M} = - \int \frac{dv}{u} \rightarrow \left| \int \frac{dx}{x} = \ln x + c \right| \rightarrow \ln M - \ln M_0 = -\frac{v - v_0}{u}$$

$$\ln M - \ln M_0 = \ln \frac{M}{M_0} = -\frac{v - v_0}{u}$$

$$M = M_0 e^{-\frac{v-v_0}{u}}$$

Константы в формуле Циолковского определяются как начальная масса ракеты M_0 и начальная скорость v_0 [Сивухин; 1979].

Третий закон Ньютона гласит: все силы возникают парами, они одной природы, действуют вдоль одной прямой, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. В этом законе приводятся пять пунктов, имеющих качественно принципиальное значение. Прежде всего, это появление сил парами, что говорит о действии и соответствующем противодействии, причем это противодействие уравнивается действием. Закон справедлив также, в инерциальных системах отсчета.

В теоретической физике все силы делят на два класса: объемные (или массовые) и поверхностные. Объемные силы (сила тяжести) действуют на каждую точку тела, а поверхностные силы (сила поверхностного натяжения в жидкостях) действуют лишь на поверхности. И поверхностные и объемные силы вносят свой вклад в суммарную энергию тела.

Следующей таблицей (см. приложение) представим силы, которые выделяют в школьном курсе физики, после чего перейдем к описанию их свойств, а также к объяснению законов, по которым они действуют.

Статика.

Второй закон Ньютона может быть записан не только для тел, находящихся в состоянии движения, но и для покоящихся тел. В этом случае, уравнение движения преобразуется в уравнение равновесия. Раздел физики, изучающий условия равновесия тел называется статикой.

Мы рассмотрим вопросы статики не с позиций общей физики, а с позиций теоретической механики, чтобы дать читателю представление о применимости, то есть прикладном характере физических законов [Лойцанский, Лурье; 1957].

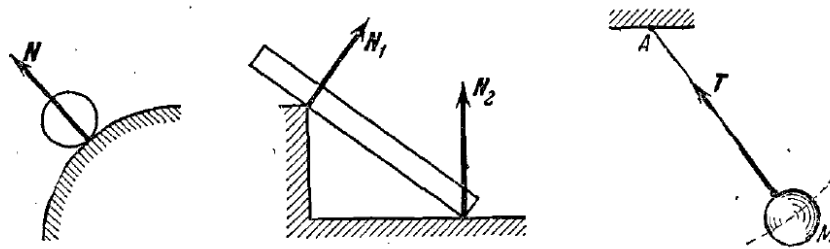
Статика базируется на пяти аксиомах:

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.
2. Действие данной системы сил на любое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.
3. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и определяемую по правилу параллелограмма.
4. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.
5. (Принцип отвердевания) Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Сделаем некоторые замечания. Аксиомы 1 и 2 имеют важное следствие: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль линии ее действия в любую другую точку тела. Аксиома 4 представляет собой один из основных законов механики (третий закон Ньютона), в данном контексте суть этой аксиомы сводится к тому, что внутренние точки тела действуют друг на друга с равными и противоположными силами, а следовательно, образуют уравновешенную систему сил, которую согласно аксиоме 2 можно отбросить. Таким образом, при решении задач статики мы можем принимать во внимание только внешние силы.

Статика рассматривает равновесие только свободных тел, однако все реальные тела не являются свободными. Действительно, всегда существуют ограничения, вызванные наличием поверхности опоры, подвеса, шарнирной точки крепления и т.п. Выход из этого положения осуществляется введение понятия реакции связей, то есть сил, действующих на тело со стороны опоры. Силы реакции связи направлены в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. В общем случае, это направление определяется общей нормалью к поверхностям соприкасающихся тел и приложена в точке касания.

Фактически, сделанное утверждение содержит в себе шестую аксиому – аксиому связей. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.



Направление сил реакции может быть неоднозначным. Так, например, невозможно определить общую нормаль к двум телам, если они соприкасаются в одной точке (см. рисунок). В этом случае, сила реакции направлена по нормали к той поверхности соприкосновения, которая определяется однозначно.

Задачи статики решаются двумя принципиально различными способами: графическим и аналитическим. Рассмотрим их более подробно.

Аналитический способ описывает действие всех сил через их проекции на оси произвольно выбранной системы координат (выбор, как всегда, определяется соображениями удобства решения задачи). Равнодействующая этих сил находится по теореме Пифагора. Для данной системы сил записываются уравнения равновесия и сумма моментов всех сил, действующих на данное тело, относительно некоторой точки. Моментом силы относительно точки называется векторная величина равная произведению силы на кратчайшее расстояние от линии действия силы до данной точки. Для того, чтобы тело находилось в равновесии необходимо, чтобы сама всех сил, действующих на тело, равнялась нулю, а также, чтобы сумма моментов этих сил, относительно некоторой точки равнялась нулю.

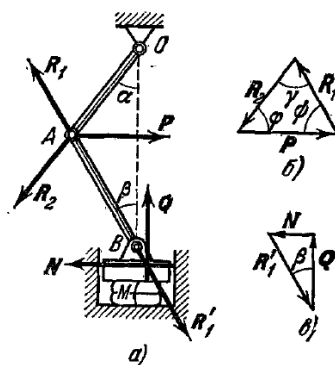
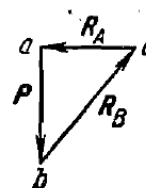
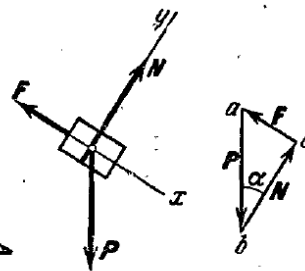
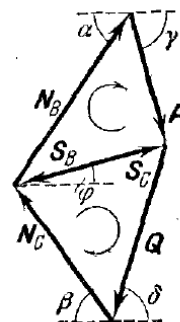
$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M = 0;$$

Графический способ определяет равнодействующую системы сил по правилам сложения векторов (правило треугольника, параллелограмма, многоугольников). Графический метод применяется тогда, когда общее число сил, действующих на тело равно трем. В этом случае применима теорема о трех силах:

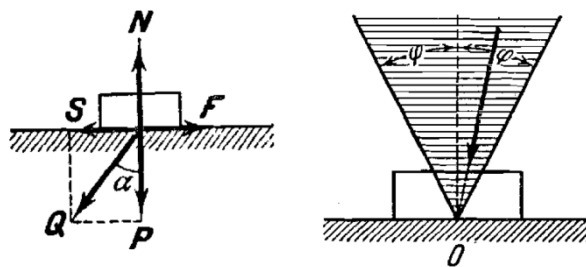
Если тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил обязательно пересекутся в одной точке, то есть образуют сходящуюся систему сил.

В общем случае, тело будет находиться в равновесии, если геометрическая сумма всех сил, действующих на тело, образует замкнутый многоугольник, или, что то же самое, равнодействующая этих сил должна равняться нулю. Приведем несколько иллюстраций без пояснений, показывающих применимость этой теоремы к решению задач [Лойцанский, Лурье; 1957].



При изучении условий равновесия тела большое значение имеет сила трения. Рассмотрим следующий пример. Пусть к телу находящемуся на шероховатой поверхности приложена некоторая сила Q , направленная под углом α к нормали, проведенной к этой поверхности. Выясним, при каких условиях тело придет в движение. Прежде всего, расставим силы, действующие на тело. На тело действует сила реакции опоры со стороны поверхности, сила трения и внешняя сила Q , которая может быть разложена на две ортогональные составляющие – силу P , прижимающую тело к поверхности и силу S – стремящуюся сдвинуть тело с места. Проецируя эти силы на координатные оси (одну из осей направим параллельно поверхности) получим:

$$N = P = Q \cos \alpha; \quad F = S = Q \sin \alpha$$



Здесь заранее предполагается, что тело находится в покое. Согласно закону Кулона – Амонтона сила трения прямо пропорциональна силе реакции опоры, поэтому можно записать, что

$$F \leq F_{\max} = kN,$$

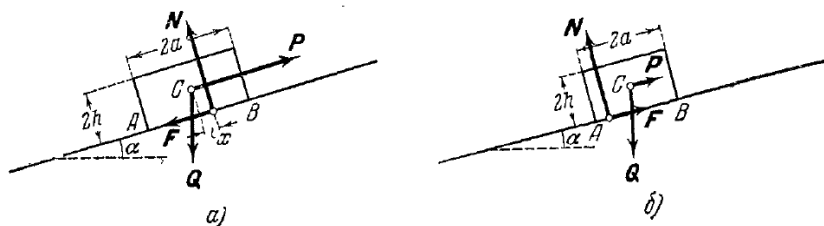
где k - коэффициент трения. Тогда

$$Q \sin \alpha \geq k Q \cos \alpha \rightarrow k = \tan \varphi \leq \tan \alpha$$

$$\alpha \geq \varphi$$

Угол φ называется углом трения. Таким образом, мы пришли к выводу, что в зависимости от материала тела и шероховатости поверхности можно определить такой угол φ , что если приложенная к телу сила будет наклонена к нормали на угол, меньший угла φ , то как бы ни была велика эта сила, то тело останется в равновесии. Если тело имеет возможность перемещаться в любом направлении на плоскости, то угол трения дает область пространства, а именно конус с углом при вершине 2α , при попадании в которую, никакая сила не сдвинет тело с места.

При решении задач, часто возникает неоднозначность в направлении силы трения. Известно, что при движении, сила трения скольжения имеет направление, противоположное вектору скорости. Сложнее дело обстоит в случае силы трения покоя, направление которой принимается противоположно направлению предполагаемого, гипотетического смещения. Проблема заключается в том, что часто наперед неизвестно направление возможного смещения. Это легко проиллюстрировать простейшим примером. Пусть к телу, находящемуся на наклонной горке, приложена сила P , толкающая тело вверх. Помимо этой силы, на тело действуют сила реакции опоры со стороны горки, направленная перпендикулярно поверхности, сила тяжести и сила трения. Сила трения будет иметь направление, зависящее от того, какая из сил будет преобладать: сила тяжести, стремящаяся опустить тело вниз или сила P , наоборот стремящаяся поднять тело вверх.



Еще один важный случай – трение качения. Прежде чем перейти к рассмотрению этого вопроса введем понятие момента силы относительно точки. Моментом силы относительно точки называется физическая величина равная произведению силы на кратчайшее расстояние от линии действия этой силы до точки, момент относительно которой вычисляется.

$$M = \mp Fh$$

Значение момента считается положительным или отрицательным, в зависимости от того, против часовой стрелки или по часовой стрелки он вычисляется.

Пусть колесо, веса Q и радиуса R , покоится на горизонтальной поверхности. Из опыта известно, что если к оси колеса приложить силу S , то колесо будет покоиться, пока эта сила не превысит некоторого значения. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Вес колеса уравнивается силой реакции со стороны поверхности, а сила, приложенная к оси колеса должна уравниваться силой трения.

$$Q = N; \quad S = F;$$

Эти условия обеспечивают отсутствие поступательного движения колеса, однако их не достаточно, для того, чтобы колесо покоилось, так как оно может прийти во вращение, под действием приложенных сил. Чтобы этого не произошло, сумма моментов сил, действующих на колесо, относительно точки соприкосновения колеса и поверхности, должна равняться нулю.

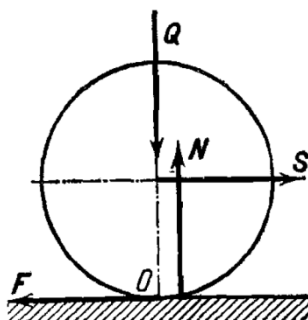
$$M(Q) + M(F) + M(S) + M(N) = 0$$

$$M(Q) = Q \times 0 = 0; \quad M(F) = F \times 0 = 0; \quad M(S) = -SR$$

Следовательно,

$$M(N) = SR$$

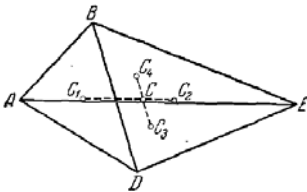
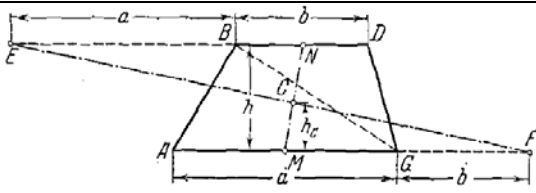
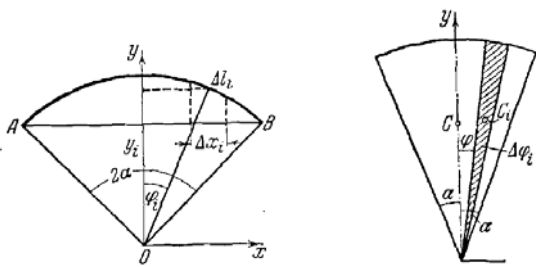
Фактически, мы приходим к необходимости сдвинуть точку приложения силы реакции опоры на некоторую величину, что физически может быть объяснено наличием механических деформаций колеса и поверхности около точки их соприкосновения. Другими словами, контакт происходил не в одной точке, а по некоторой поверхности.



Ряд задач статики и динамики легче решать, если знать положение центра масс тела. Координаты центра масс системы материальных точек определяются из проекций следующего выражения на координатные оси:

$$\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

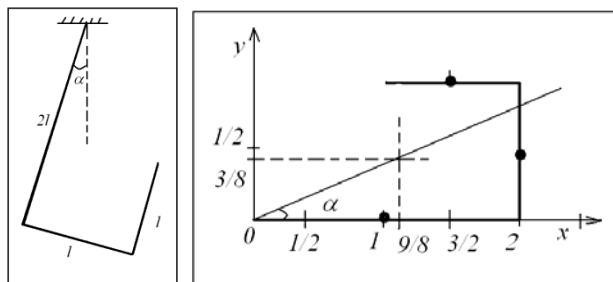
Для нахождения центра масс некоторого тела, его необходимо разбить на систему материальных точек и применить приведенную формулу. В ряде случаев, координаты центра масс легче найти графически, как правило, это случаи, обладающие той или иной симметрией. Приведем таблицу, содержащую координаты центров тяжести отдельных фигур.

Фигура	Рисунок	Координаты
Треугольник		Точка пересечения медиан треугольника
Четырехугольник		Находится разбиением четырехугольника на два треугольника
Трапеция		$h_c = \frac{1}{3} \frac{h(a+2b)}{a+b}$
Дуга окружности		$y_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Круговой сектор		$y_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

Существует теорема о движении центра масс, которая формулируется следующим образом: если всю массу системы материальных точек сосредоточить в ее центре масс, то под действием приложенных сил центр масс будет двигаться так же, как и система материальных точек под действием тех же сил.

Пусть однородный прут, размеры которого указаны на рисунке, повесили за верхний его конец. Определите, какой угол будет составлять большое ребро прута с вертикалью. Используя теорему о движении центра масс, легко показать, что прут примет такое положение равновесия,

при котором его центр масс окажется на вертикальной прямой, проходящей через точку подвеса. Сосредоточим массы ребер прута в центрах масс этих ребер. Определим положение центра масс прута, рассматривая его как совокупность трех материальных точек: $2m, m, m$.



$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1m + \frac{3}{2}m + 2m}{2m + m + m} = \frac{9}{8}$$

$$y_{\text{ц.м.}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0m + \frac{1}{2}m + 1m}{2m + m + m} = \frac{3}{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{\text{ц.м.}}}{x_{\text{ц.м.}}} = \frac{1}{3}$$

Теорема о центре масс применяется не только в статике. Ее важным следствием является утверждение о том, что если система находится лишь под действием внутренних сил, то при любых процессах, происходящих в этой системе, положение ее центра масс остается неизменным.

Закон Всемирного тяготения. Гравитация. Вес тела.

Все тела обладают своим гравитационным полем, которое определяется массой тела. Поэтому говорят, что масса – мера гравитационного взаимодействия тел. Выше было сказано, что масса – мера инертности тела. Оба утверждения имеют место. В современной физике вопрос о разделении инертной и гравитационной масс, до сих пор остается открытым. Так как гравитационное поле тел определяет масса, то становится очевидным причина пренебрежения сил тяготения предметов окружающих Землю, по сравнению с силой тяготения самой Земли. Говоря о силе тяготения, обычно подразумевают Землю или другие крупные космические объекты. Впервые теорию тяготения сформулировал Ньютон. Закон всемирного тяготения гласит: сила взаимодействия между двумя телами прямо пропорционален произведению их масс, и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Коэффициент пропорциональности G называется *гравитационной постоянной*. Впервые гравитационная постоянная была измерена лордом Г. Кавендишем при помощи крутильных весов в 1798 году. Установка представляла собой коромысло, подвешенное на нити к которой было прикреплено зеркало. На концах коромысла крепились два свинцовых шара массы m . Рядом с ними на земле были установлены два массивных шара массы M . Под действием сил гравитации коромысло поворачивалось, угол поворота α фиксировался по отклонению луча, отраженного от зеркала. Если l - длина коромысла, то момент сил, поворачивающий коромысло равен:

$$M = G \frac{mM}{r^2} l$$

Первоначально коромысло приводилось в состояние, при котором все четыре шара находились на одной прямой ($\alpha = \alpha_1$). Затем коромысло поворачивали ($\alpha = \alpha_2$). Момент гравитационных сил должен быть уравновешен моментом упругих сил нити $f\alpha$.

$$f\alpha_1 = G \frac{mM}{r^2} l; f\alpha_2 = G \frac{mM}{r^2} l \rightarrow f(\alpha_1 - \alpha_2) = 2G \frac{mM}{r^2} l$$

Модуль кручения нити находился по наблюдению за периодом свободных колебаний коромысла

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{f}} \Rightarrow G = \frac{lr^2}{M} \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$$

В векторной форме закон всемирного тяготения записывается следующим образом:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Гравитационное поле Земли определяется ускорением силы тяжести.

$$g = G \frac{M_3}{(R^2 \mp h)^2}$$

Здесь h – расстояние от поверхности Земли до некоторой точки, в которой определяется ускорение силы тяжести, M_3 - масса Земли, R - радиус Земли. В случаях, когда расстояние от поверхности Земли до тела, относительно которого записывается закон всемирного тяготения, много меньше радиуса Земли, то эти расстоянием пренебрегают. В гравиметрии и геодезии показывается, что если нас будет интересовать ускорение силы тяжести внутри Земли, то расстояние необходимо отсчитывать от центра Земли до заданной точки. Другими словами, вышележащие слои не оказывают на тело, помещенное внутри Земли, никакого воздействия (точнее это воздействие скомпенсировано). Для определения силы тяжести подставим ускорение свободного падения в закон всемирного тяготения:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Весом тела называется сила, с которой тело давит на свою опору или растягивает подвес. Принципиальным отличием между силой тяжести и весом тела является тот факт, что сила тяжести приложена к центру масс тела, а вес к точке опоры или подвеса тела. Центром масс тела называется геометрическая точка, которая имеет массу, равную массе тела, и которая движется так же, как и тело, под действием одинаковой суммы сил.

Согласно введенному определению, понятно, что вес тела, находящегося в свободном падении равен нулю. Из второго закона Ньютона можно показать, что вес равноускоренно движущегося тела равен:

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

На основе этого выражения вводят понятие перегрузки и невесомости. Невесомостью называется состояние тела, при котором его вес равен нулю. Перегрузкой называется состояние тела, при котором его вес превышает силу тяжести. Коэффициентом перегрузки называется отношение ускорения, испытываемое телом к ускорению силы тяжести.

$$n = \frac{a}{g}$$

Законы Кеплера

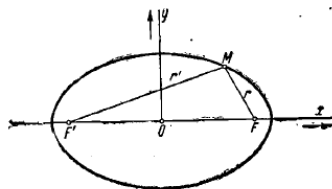
На основе наблюдений астронома Тихо Браге Кеплер установил эмпирическим путем три закона планетных движений.

Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Радиус – вектор планеты в равные времена описывает равные площади (закон постоянства секторной скорости).

Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

Вспомним, что такое эллипс и основные его свойства [Мусхелишвили, 1947]. Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная. Эти две точки называются фокусами эллипса.



$$r + r' = 2a$$

$$r' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}; \quad r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$r + r' = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + (ay)^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Последнее выражение носит название нормального уравнения эллипса. У эллипса выделяют большую a и малую b полуоси. Если полуоси эллипса равны, то эллипс вырождается в окружность, в этом случае $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$. В противном случае, величину c можно рассматривать как меру отклонения эллипса от окружности, ее называют линейным эксцентриситетом эллипса. Отношение линейного эксцентриситета к одной из полуосей называют численным эксцентриситетом.

Отношение линейного эксцентриситета к одной из полуосей называют численным эксцентриситетом.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Получим еще одно важное свойство эллипса.

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = ar = a^2 - cx$$

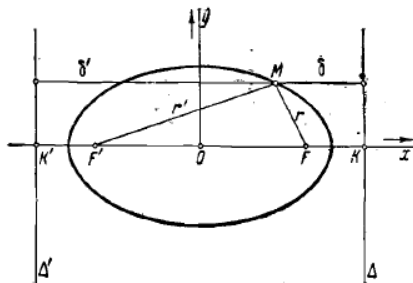
$$ar = a^2 - cx; r = a - \frac{c}{a}x = a - ex$$

$$r = a - ex; r' = a + ex$$

Таким образом, мы получили, что расстояния точек эллипса до их фокусов могут быть выражены в виде линейных функций декартовых координат.

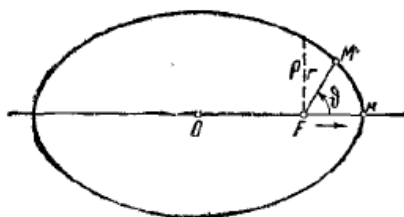
$$r = a - ex = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = e\delta$$

Величина δ представляет собой расстояние от точки эллипса до прямой, параллельной оси ординат, отстоящей от нее на расстоянии $\frac{a}{e}$. Эта прямая называется директрисой эллипса. Очевидно, в силу симметрии, с противоположной стороны эллипс имеет вторую директрису на расстоянии $-\frac{a}{e}$.



Таким образом, отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и до соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная эксцентриситету.

Для наших целей удобно записать уравнение эллипса в полярных координатах.



$$r = a - ex$$

$$x = \overrightarrow{OM}_x = (\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM})_x = c + r \cos \theta = ae + r \cos \theta$$

$$r = a - e(ae + r \cos \theta); \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

$$a(1 - e^2) = p; \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Теперь, получим законы Кеплера аналитически, основываясь на законе Всемирного тяготения Ньютона.

Пусть имеются два тела массами m_1 и m_2 соответственно, радиус – векторы этих тел в инерциальной системе отсчета $Ox'y'z'$ равны $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Согласно закону Всемирного тяготения, эти два тела взаимодействуют с силами равными по модулю и направлены в противоположные стороны, численное значение которых определяется выражением:

$$|\overrightarrow{F_{12}}| = |\overrightarrow{F_{21}}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

Запишем второй закон Ньютона для этих двух тел:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt} - \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{dt} = -G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} - G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r}$$

Будем рассматривать вектор $\vec{r}$, как радиус – вектор в полярной системе координат, привязанной к неинерциальной системе отсчета, с центром в точке, где находится тело m_1 . Пусть $\vec{V} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ и $M = m_1 + m_2$, тогда:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

Продифференцируем момент скорости $[\vec{r} \times \vec{V}]$ системы двух тел по времени:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{V}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right] = 0$$

$$[\vec{r} \times \vec{V}] = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \vec{C} = const$$

$$[\vec{r} \times \vec{V}] = \left| V = [\omega r]; \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \right| = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$$

Мы получили, что момент вектора скорости есть постоянный вектор. Этот вектор определяет неизменную площадь орбиты относительного движения тела, проходящую через центральное тело. Модуль вектора $\vec{C}$ – секторная скорость, постоянство которой, означает постоянство площадь, заметаемой радиус – вектором за единицу времени. (Второй закон Кеплера).

Радиус – вектор, характеризующий положение движущегося тела относительно неподвижного центрального тела в задаче двух тел, всегда лежит в плоскости орбиты и за равные промежутки времени описывает площади равной величины.

Запишем второй закон Ньютона для тела m_1 в полярной системе координат. Для этого учтем, что переход от декартовой системы координат к полярной осуществляется следующим образом:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = -G \frac{M}{r^2} \left| \frac{\vec{r}}{r} \right| = -G \frac{M}{r^2} \cos \varphi$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = -G \frac{M}{r^2} \left| \frac{\vec{r}}{r} \right| = -G \frac{M}{r^2} \sin \varphi$$

Разделим эти выражения почленно на соотношение $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$:

$$\frac{dV_x}{d\varphi} = -G \frac{M}{C} \cos \varphi; \quad dV_x = -G \frac{M}{C} \cos \varphi d\varphi = -G \frac{M}{C} d(\sin \varphi)$$

$$\frac{dV_y}{d\varphi} = -G \frac{M}{C} \sin \varphi; \quad dV_y = -G \frac{M}{C} \sin \varphi d\varphi = +G \frac{M}{C} d(\cos \varphi)$$

Проинтегрировав, получаем:

$$V_x = -G \frac{M}{C} \sin \varphi + A$$

$$V_y = -G \frac{M}{C} \cos \varphi + B$$

$$x = r \cos \varphi \rightarrow V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -G \frac{M}{C} \sin \varphi + A$$

$$y = r \sin \varphi \rightarrow V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -G \frac{M}{C} \cos \varphi + B$$

Преобразуем полученные уравнения и почленно сложим:

$$\begin{aligned} -\frac{dr}{dt} \cos \varphi \sin \varphi + r \sin^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= G \frac{M}{C} \sin^2 \varphi - A \sin \varphi \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi \cos \varphi + r \cos^2 \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= G \frac{M}{C} \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \end{aligned} \rightarrow r \frac{d\varphi}{dt} = G \frac{M}{C} + B \cos \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2} \rightarrow \frac{1}{r} = G \frac{M}{C^2} + \frac{B}{C} \cos \varphi$$

Введем обозначения: $\frac{C^2}{GM} = p$; $\frac{BC}{GM} = e$, тогда получаем из уравнения траектории – уравнение конических сечений в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

Подбирая эксцентриситет, получаем для конических сечений параболу, эллипс, гиперболу или окружность.

$e < 1$	Эллипс
$e = 1$	Парабола
$e > 1$	Гипербола
$e = 0$	Окружность

Первый закон Кеплера, в уточненной форме, сформулируем так: под действием силы тяготения одно тело движется относительно другого по одному из конических сечений.

Пусть на известны полуоси эллиптической орбиты и фокусы этой орбиты.

$$C = \frac{2S}{T} = |S = \pi ab| = \frac{2\pi ab}{T} = \left| b = a\sqrt{1 - e^2} \right| = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}$$

$$p = \frac{C^2}{GM} = a(1 - e^2); \quad \frac{BC}{GM} = e$$

$$\left(\frac{C}{\sqrt{1 - e^2}} \right)^2 = \left(\frac{2\pi a^2}{T} \right)^2 = aGM$$

Так как $M = m_1 + m_2$, то

$$\frac{T^2}{a^3} (m_1 + m_2) = \frac{4\pi^2}{G} = const$$

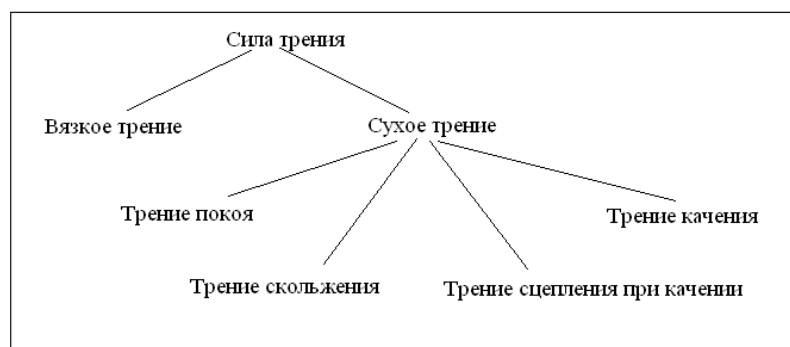
Отношение квадрата сидерического периода обращения двух тел к кубу среднего расстояния между ними, умноженное на сумму их масс, есть универсальная постоянная.

Сила трения

Сила трения встречается почти во всех физических явлениях, иногда ее называют силой сопротивления. Главной особенностью сил трения, в отличие от других сил, является тот факт, что в процессе трения механическая энергия движения преобразуется в другие виды энергии, как правило, тепловую энергию. Различают два основных вида трения: сухое трение и вязкое. В процессе движения тела, прямоугольной формы, по поверхности стола на него действует сила сухого трения, обусловленная шероховатостями поверхностей соприкасающихся тел и сила вязкого сопротивления тела о воздух.

Характер сил сухого трения также может быть различен. Рассмотрим два примера: телу, находящемуся на горизонтальной поверхности, сообщили ускорение в горизонтальном направлении и тело, покоящееся на горизонтальной поверхности, начинают тянуть за веревку. В первом случае, под действием силы трения, направленной против скорости тела, тело начнет замедляться, вплоть до полной остановки. На тело действует сила трения скольжения. Во втором случае, тело будет покоиться, до тех пор, пока сила натяжения нити не превысит некоторого критического значения, называемого максимальным значением силы трения покоя, после этого тело приобретет некоторое ускорение, вычисляемое по второму закону Ньютона.

В общем случае необходимо отметить, что сила трения – сила электромагнитной природы, обусловленная взаимодействием кристаллических решеток, соприкасающихся тел. Можно дать следующую классификацию сил трения.



Рассмотрим эти силы более подробно.

Вязкое трение.

Сила вязкого трения, возникающая при движении тела в вязкой среде, зависит от формы тела, скорости движения и динамических свойств среды, а именно плотности и вязкости. Еще Ньютоном было установлено, что сила вязкого сопротивления пропорциональна скорости движения тела в среде, а ее направление противоположно скорости движения тела.

Для иллюстрации эффектов, обусловленных появлением сил вязкого трения, воспользуемся следующими двумя качественными примерами:

1. Колебания груза на пружинке, в вязкой среде.
2. Падение шарика в вязкой среде.

При рассмотрении колебаний в присутствии сил трения, появляется эффект затухания колебательного процесса. Пусть имеется груз, прикрепленный к пружинке, которая находится в вязкой среде. Колебания осуществляются в горизонтальной плоскости. Необходимо найти период колебаний такой системы.

Уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$b\dot{x}$ - сила вязкого трения (сопротивления), пропорциональная скорости движения тела, b - коэффициент вязкого трения, обусловленный формой тела и свойствами вязкой среды. Будем искать решение в виде:

$$x = x_0 e^{\lambda t}$$

$$\lambda, A - const$$

x_0 - амплитуда колебаний. Подставляя это решение в уравнение движения, имеем:

$$m\lambda^2 x_0 e^{\lambda t} - \lambda b x_0 e^{\lambda t} + k x_0 e^{\lambda t} = 0;$$

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0;$$

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{b}{m} &= \delta; \\ \frac{k}{m} &= \omega_0^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

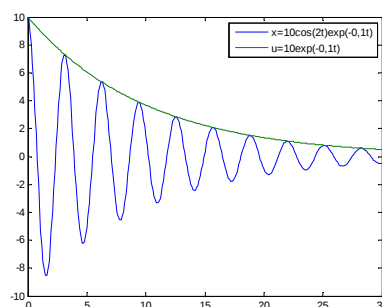
Приходим к квадратному уравнению относительно λ .

ω_0^2 - частота собственных колебаний, $\tau = \frac{1}{\delta}$ - время релаксации (время, в течении которого амплитуда уменьшается в e раз). Согласно формуле Эйлера [Лаврентьев, Шабат; 1951]:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$x = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{-(\delta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t} = x_0 e^{-t\delta} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} = x_0 e^{-t\delta} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Графически это решение выглядит как затухающая экспонента, моделируемая косинусом.



Рассмотрим задачу о падении шарика в вязкой среде. При падении на шарик действует три силы: сила тяжести, сила вязкого сопротивления воздуха и сила Архимеда. Сила вязкого сопротивления, действующая на тело сферической формы, движущееся в вязкой среде, определяется формулой Стокса:

$$F_c = 6\pi r\eta v,$$

где r - радиус сферической поверхности, η - коэффициент вязкости среды, v - скорость движения тела. Запишем уравнение движения шарика.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \rho_2 gV - 6\pi r\eta v$$

Шарик имеет нулевую начальную скорость, которая будет увеличиваться под действием силы тяжести, однако по мере увеличения скорости, будет увеличиваться сила вязкого сопротивления, и как следствие, уменьшаться ускорение. В результате, наступит момент, когда ускорение станет равным нулю, и тело будет падать с равномерной скоростью.

Заметим, что приближение о прямой пропорциональности между силой вязкого сопротивления и скоростью справедливо лишь для малых скоростей, при больших скоростях эта зависимость принимает степенной характер.

Перепишем уравнение движения шарика, учитывая геометрию задачи.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3; m = \rho V$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}(\rho - \rho_2)g\pi r^3 - 6\pi r\eta v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(\rho - \rho_2)}{\rho}g - \frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho r^2}v$$

Максимальное значение скорости находится из условия равенства нулю ускорения, то есть $\frac{dv}{dt} = 0$.

$$\frac{2(\rho - \rho_2)}{9}\frac{g}{\rho} = \frac{\eta}{\rho r^2}v_{\text{макс}}$$

Тогда,

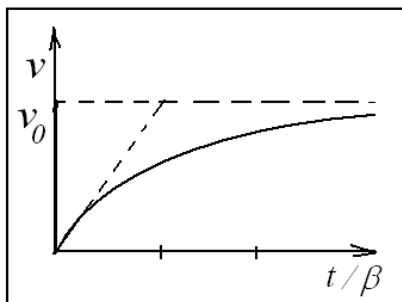
$$\beta \frac{dv}{dt} = v_{\text{макс}} - v; \quad \beta = \frac{2\rho r^2}{9\eta}$$

$$\beta \frac{dv}{v - v_{\text{макс}}} = -dt \rightarrow \beta \ln(v - v_{\text{макс}}) = -t + C$$

$$v - v_{\text{макс}} = Ae^{-\frac{t}{\beta}}; \quad A = -v_{\text{макс}}$$

$$v = v_{\text{макс}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta}} \right)$$

График зависимости скорости от времени представлен на рисунке ниже.



Сила сухого трения

Среди сил сухого трения выделяют четыре типа: сила трения покоя, скольжения, качения и качения при сцеплении. Основные свойства этих сил представлены в таблице [Хайкин, 1963], см. приложение.

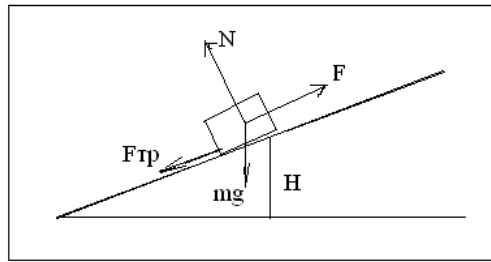
Сила трения во всех случаях препятствует относительному движению соприкасающихся тел. При некоторых условиях силы трения делают это движение тел просто невозможным. Однако роль сил трения не сводится только к тому, чтобы тормозить движение тел. В ряде практически очень важных случаев движение не могло бы возникнуть без действия сил трения.

За этим можно проследить на примере движущегося автомобиля. Сила трения, действующая со стороны земли на ведомые колёса, и сила сопротивления воздуха направлены назад и способны только затормозить движение. Единственной внешней силой, способной увеличить скорость автомобиля, является сила трения покоя, действующая на ведущие колёса. Не будь этой силы, автомобиль буксовал бы на месте, несмотря на вращение.

Работа двигателя, приводящего во вращение ведущие колёса, вызывают появление сил трения покоя. Эти силы возникают лишь при условии, что какие-нибудь другие силы стремятся вызвать относительное движение тел.

Трение скольжения, как и трение покоя, тоже может быть полезным и вредным. Полезно, например, трение скольжения в тормозных системах сухопутного транспорта. Однако во многих случаях трение скольжения вредно. У всех машин из-за трения скольжения происходит нагревание и износ их деталей. Значительного уменьшения силы трения скольжения достигают с помощью смазки - чаще всего тонкого слоя жидкости между трущимися поверхностями. Ни одна машина не может работать без смазки. Специальная система смазки предусматривается при конструировании всех машин.

Роль сил трения различна, в различных механических устройствах. Наличие силы трения, прежде всего, влияет на КПД устройства. Рассмотрим простейший пример: подъем тела, массы m , по наклонной плоскости, угол наклона α , на высоту H .



Для подъема тела на высоту H , необходимо преодолеть силу тяжести, действующую на тело, и силу трения. КПД системы будет определяться как отношение потенциальной энергии тела на высоте H , к работе по подъему тела.

$$\eta = \frac{W}{A}$$

$$A = FS; W = mgH$$

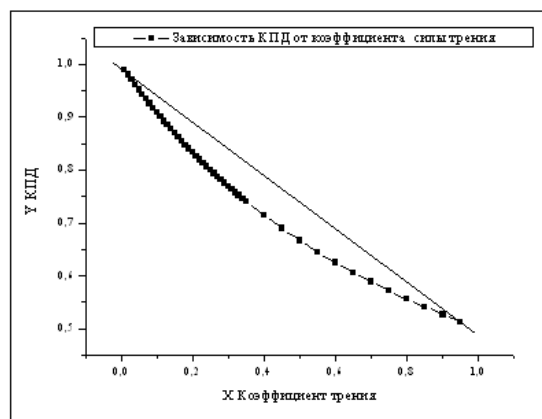
$$\vec{F} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{тр}$$

$$\sin \alpha = \frac{H}{S} \Rightarrow S = \frac{H}{\sin \alpha}$$

$$F = mg \sin \alpha + \mu mg \sin \alpha$$

$$\eta = \frac{mgH}{mg \sin \alpha (1 + \mu) \frac{H}{\sin \alpha}} = \frac{1}{1 + \mu}$$

Полученное выражение показывает, что в отсутствии сил трения, $\text{КПД}=1$, а наличие трения, фактически приводит к снижению КПД, по гиперболическому закону.



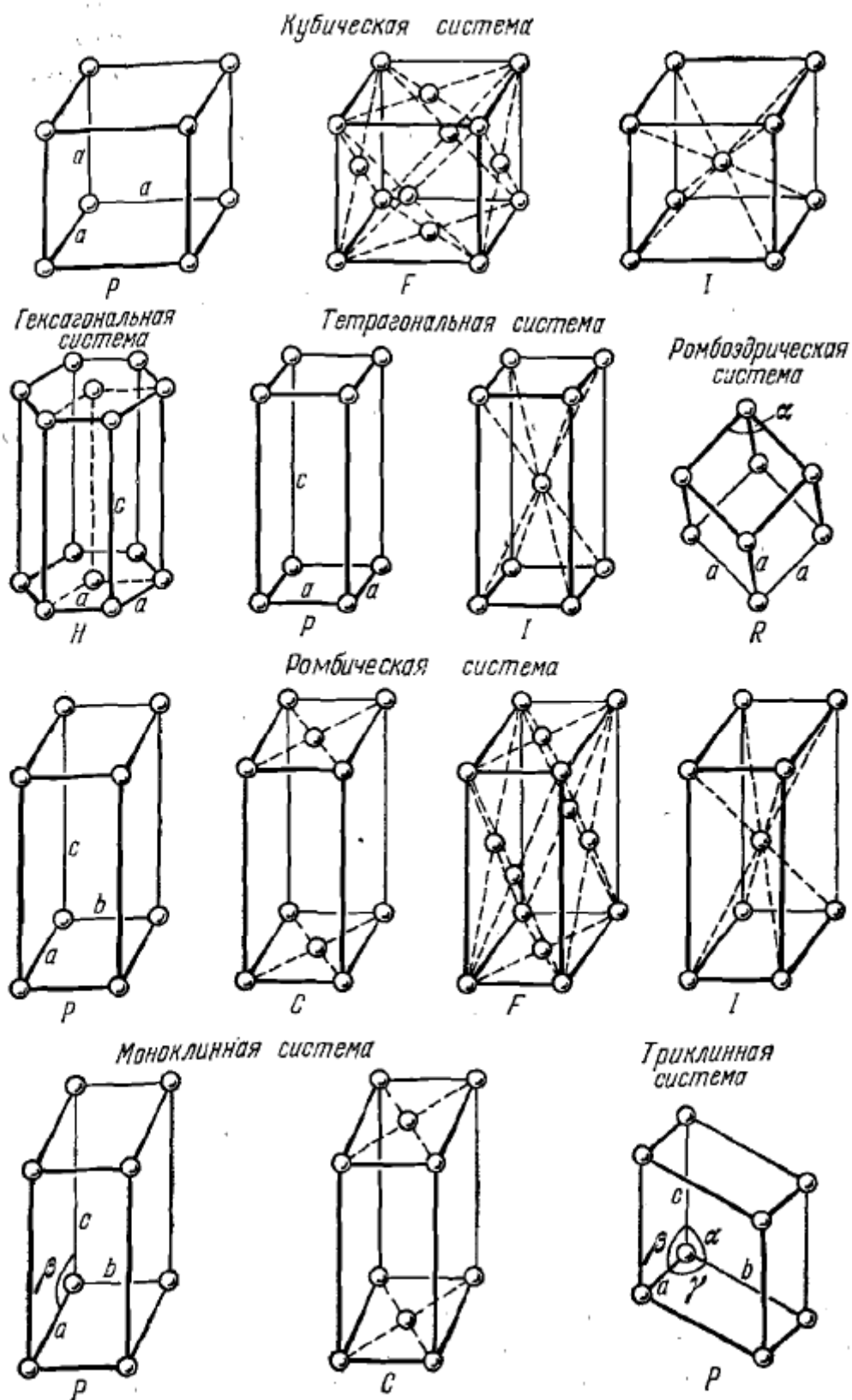
Природа упругости и пластичности.

Классические курсы общей и элементарной физики рассматривают вопросы прочности и пластичности в рамках механики сплошной среды. Настоящая лекция рассматривает эти вопросы несколько шире, привлекая к выяснению не только механических, но и физических причин прочности и пластичности основы физики твердого тела. Преимущественно, прочность соединений и конструкций, это скорее тема не фундаментальных, а прикладных исследований. Эти вопросы широко освещены в инженерных науках, таких как материаловедение и сопротивление материалов.

Объектом исследования здесь является сплошная среда, то есть среда, состоящая из бесконечного числа материальных точек, а следовательно обладающая бесконечным числом степеней свободы. Наибольшие достижения в исследовании вопросов прочности относятся к металлам и сплавам. В настоящее время активно развиваются направления, по созданию конструкционных материалов – композитов. Все металлы, горные породы и многие композиты имеют кристаллическую структуру. Структура и состав среды, в рамках данных термодинамических условий, целиком определяют все физические свойства среды [Борн, 1938]. К этим свойствам относятся: электропроводность, теплопроводность, прочность, пластичность и др. Зная строение среды, мы можем делать выводы об однородности, изотропности или анизотропности среды в отношении каких-либо свойств.

Рассмотрение и изучение кристаллических структур – задача физики твердого тела. Рассмотрим некоторые основные вопросы кристаллографии. Существуют различные пути изучения кристаллических тел. Рассматривая вопросы плотности, кристалл удобно считать непрерывной сплошной средой (изотропный континуум), а вопросы упругости необходимо рассматривать в более сложном виде, так как свойства упругости зависят от направления (анизотропный континуум). Рассмотрение атомной структуры требует прерывной структуры (однородный дисконтинуум). Последнее представление необходимо при рассмотрении вопросов пластичности.

Кристаллами будем называть тела, имеющие строгую периодичность в расположении молекул, атомов и ионов. Это основное отличие кристаллических тел от аморфных тел или жидкостей. Простейшим элементом кристаллической структуры является элементарная ячейка. Каждая элементарная ячейка имеет свою форму, повторение которой в пространстве позволяет заполнить весь объем без пустот. Основными свойствами элементарных ячеек является свойство симметрии, на основе которого производится систематизация кристаллических систем. Выделяют следующие семь кристаллических систем [Ландау; 1969]: кубическая, гексагональная, тетрагональная, ромбоэдрическая, ромбическая, моноклинная, триклинная.



Во всех реальных кристаллах есть дефекты. Именно дефекты определяют то многообразие физических процессов и явлений, которое мы наблюдаем в нашем мире. Под дефектом понимается отклонение строения кристалла от четкой периодичности его структуры. Все дефекты могут быть классифицированы на следующие основные типы:

Тепловые колебания.

Точечные дефекты (вакансии, атомы внедрения и примеси).

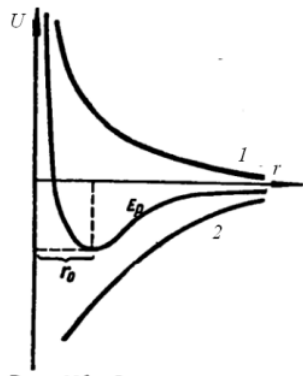
Линейные дефекты – дислокации.

Поверхностные дефекты (наружная поверхность твердого тела, границы зерен и другие внутренние поверхности твердого тела).

Все атомы твердого тела находятся в состоянии непрерывного теплового движения. Этого воздействия достаточно, чтобы атом отклонился на 5-10%, по отношению к параметру решетки, из состояния равновесия. Чтобы полностью выбить атом из положения равновесия необходимо затратить работу, равную энергии связи атома в решетке. Рассмотрим это более подробно. Полная энергия кристаллической решетки может быть представлена выражением:

$$U = -\frac{A}{r^a} + \frac{B}{r^b},$$

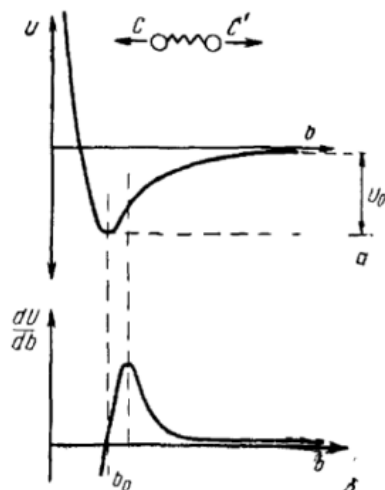
где первое слагаемое обусловлено наличием сил отталкивания, а второе слагаемое наличием сил притяжения. Графически эти зависимости представляются следующим образом:



Кривая 1 – наличие сил отталкивания, кривая 2 – наличие сил притяжения. В сумме они определяют вид потенциальной кривой. Задавая коэффициенты в определении потенциала, мы полностью определяем энергию решетки и можем рассчитать практически все основные свойства кристалла: упругие модули, проводимость, диэлектрическую и магнитную проницаемости, оптические свойства кристаллов, поляризуемость. Силы отталкивания обусловлены действием кулоновских сил и действия принципа запрета Паули. Если два атома сблизятся, то их электронные оболочки пересекутся и сразу несколько электронов окажутся в одинаковых положениях, что запрещает принцип Паули.

Величина E_p называется глубиной потенциальной ямы и определяет ту работу, которую надо совершить, чтобы удалить атом из кристаллической решетки.

Известно, что производная энергии по координате есть сила, то есть если продифференцировать зависимость потенциальной энергии двух соседних атомов кристаллической решетки от расстояния, то мы получим аналогичную зависимость для силы взаимодействия между атомами [Уэрт, Томсон; 1969].

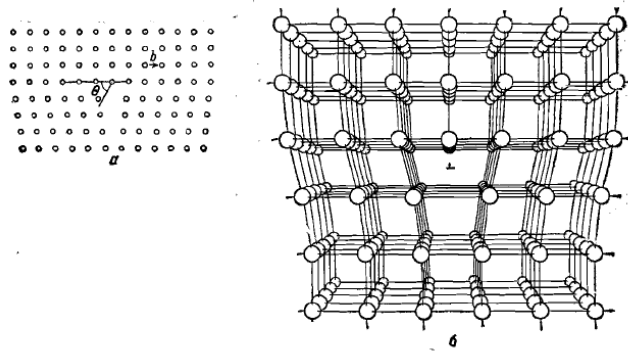


Легко заметить, что при определенных допущениях, в области растяжения сила взаимодействия линейно меняется с расстоянием. Линейный характер справедлив для области малых деформаций, при которых атом отклоняется от положения равновесия на незначительную величину. После снятия нагрузки сила взаимодействия с соседними атомами возвращает его в исходное положение и деформации исчезают. Деформации, которые исчезают после снятия внешней нагрузки, и тело принимает свое исходное состояние, называются упругими.

Как мы видим, для малых упругих деформаций справедлив закон Гука, согласно которому, сила упругого взаимодействия прямо пропорциональна смещению.

Вершину потенциальной ямы, которая характеризует область малых деформаций, можно считать симметричной, поэтому тепловые колебания атомов в узлах кристаллической решетки, усредненные по периоду колебаний, дают положение равновесия. Это подтверждается тем, что в процессе теплового движения частиц тела, само тело не деформируется. Если же мы будем нагревать тело, увеличивая амплитуду колебаний атомов в узлах кристаллической решетки, то положение равновесия будет меняться, и мы будем наблюдать процесс теплового расширения. Несимметричный характер функции потенциальной энергии взаимодействия двух атомов от расстояния – следствие ангармонизма колебаний атомов в узлах кристаллической решетки, а также причина существования явления теплового расширения тел.

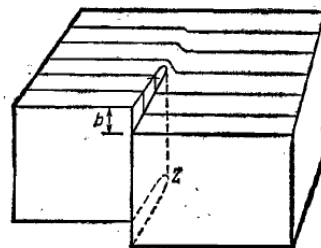
Перейдем теперь к рассмотрению линейных дефектов – дислокаций. Выделяют два типа дислокаций: краевые и винтовые. Краевые дислокации можно считать дефектом, обусловленным тем, что в часть объема кристаллической решетки введена лишняя атомная плоскость. Область кристаллической решетки вблизи дислокационной линии, где искажения чрезвычайно велики, называется ядром дислокации. Атомы пытаются скомпенсировать дефект структуры, поэтому атомы, расположенные над краем лишней полуплоскости испытывают действие сжимающих напряжений. Однако, под плоскостью, расстояние между атомами больше, и там действуют растягивающие напряжения. Это локальное расширение называется дилатацией.



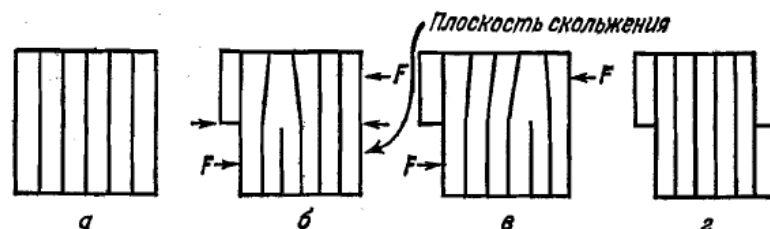
Расположение атомов, соответствующее краевой дислокации.
 а — поперечное сечение кристалла; б — перспективное изображение расположения атомов вокруг краевой дислокации в простом кубическом кристалле.

Если в кристаллической структуре сделать надрез, а потом сместить ряды атомов на один или несколько периодов кристаллической решетки, то такой дефект структуры будет называться винтовой дислокацией. При винтовой дислокации все атомы находятся на одной поверхности.

Структура кристалла с винтовой дислокацией.
 Высота ступеньки на верхней поверхности обычно равна одному параметру решетки. Ряды атомов, перпендикулярные к дислокации, находятся на винтовой поверхности.



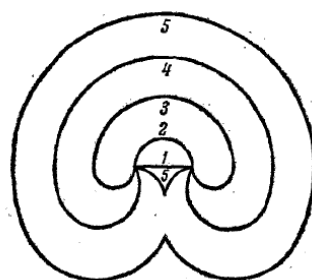
Краевая и винтовая дислокации обладают энергией, которую можно рассчитать в предположении об упругом смещении в твердом теле. Под действием внешних напряжений происходит размножение дислокаций и их движение, которое обеспечивается переползанием и скольжением. На рисунке ниже, схематично показан процесс движения дислокаций, которые ответственны за деформацию сдвига, вызванную действием внешних сил, приложенных к поверхности кристалла.



Движение краевой дислокации через кристалл вдоль ее плоскости скольжения.

Когда дислокация пройдет через весь кристалл от одной его поверхности до другой, верхняя часть кристалла сдвинется по отношению к нижней на расстояние, равное длине вектора Бюргерса.

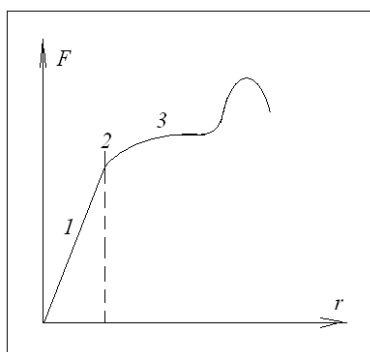
Размножение дислокаций, примером объяснения которого может служить источник Франка – Рида, обеспечивают деформации, значительно превышающие параметр кристаллической решетки и обеспечивающие пластическую деформацию. При увеличении напряжений, исходный дислокационный сегмент будет выгибаться и принимать последовательно формы 2 – 4. При стягивании выступа 5 сегмент примет свою исходную конфигурацию. Это лишь одна из возможных схем объяснения явления размножения дислокаций.



Источник Фран-
ка — Рида.
Под действием напряжений дислокация выгибается наружу. После «залечивания» остается источник в его исходной конфигурации 5 и образуется расширяющаяся петля.

Теория дислокаций чрезвычайно сложна, и ее объяснение не входит в задачи нашего курса, здесь мы лишь указали на физические причины объясняющие закон Гука и существование пластических деформаций. Как будет деформироваться твердое тело, упруго или пластично, зависит от термодинамических условий (давление и температура), а также характера нагружения материала (скорость и интенсивность нагружения, вид нагружения).

В общем случае, зависимость деформации от внешней нагрузки представляется на диаграмме нагружения следующим образом:



Участок 1 соответствует упругим деформациям, подчиняющимся закону Гука, участок 2 – переход от упругого состояния к пластичному. Участок 3 – пластическое течение материала – область неупругих деформаций (то есть после снятия нагрузки деформации не исчезают), где деформации тела увеличиваются, практически без увеличения внешней силы. После окончания пластического течения, вследствие движения и взаимодействия дислокаций, образуется локальное нарушение структуры кристалла, которое характеризуется повышенной прочностью. В связи с этим, для дальнейшего деформирования материала необходимо увеличить внешнюю деформирующую силу. В итоге, достигается предел прочности материала, атомные связи рвутся и тело разрушается.

Литература

1. Д.В. Сивухин. Курс общей физики .Механика. М. Наука. 1979
2. Н.И. Мусхелишвили Курс Аналитической геометрии, 1947
3. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат Методы теории функции комплексного переменного, 1951
4. Ч. Уэрт, Р. Томсон Физика твердого тела, Мир, 1969
5. Л.Д. Ландау, А.И. Ахиезер, Е.М. Лифшиц Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. Наука 1969
6. С.Э. Хайкин. Физические основы механики, 1963
7. Л.Г. Лойцанский, А.И. Лурье Курс теоретической механики, 1957
8. Борн М., Гепперт-Мейер М. Теория твердого тела. 1938