С. П. Крюков

Общая физика

Курс лекций

Том 2, часть 2

Школа им. А.Н.Колмогорова
«Самообразование»
2003

Крюков С.П.

Общая физика. Курс лекций. Том 2. Часть 2. – М.: Школа имени академика А.Н.Колмогорова, «Самообразование», 2003. – ___ с.

Лекция 19

ЧАСТЬ IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Колебательные процессы являются одними из самых распространенных в природе. Мы сталкиваемся с ними повсюду: это – и колебание ветки дерева, и вибрации валов машин, и качка судов, и излучение и прием радиоволн, и многие, многие другие. Общим между всеми этими процессами, несмотря на совершенно, порой, различную их физическую природу, является характер движения системы, его (движения) повторяемость. Более детальный анализ дает, что уравнения, описывающие эти движения, во многих случаях в точности совпадают, а потому и поведения систем оказываются совершенно идентичными. Именно это обстоятельство и служит (более чем достаточным) основанием для выделения теории колебаний (и волн) в самостоятельный раздел физики, изучающий с *единой* точки зрения различные повторяющиеся процессы, могущие иметь абсолютно разную физическую природу. Мы начнем изучение этого раздела с рассмотрения простейшей системы с одной степенью свободы[1].

Глава 12. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Периодическим колебанием (системы с одной степенью свободы) называется процесс, описываемый периодической функцией. Напомним, что функция $f(t)$ называется периодической, если существует такое $T = const > 0$, что для любого t[2]

$$f(t+T) = f(t). \tag{1}$$

Величина T называется периодом функции $f(t)$.

Из этого определения следует, что величины $2T$, $3T$ и т.д. тоже являются периодами функции $f(t)$. Чтобы исключить возникающую отсюда неопределенность, мы в дальнейшем под периодом будем, не оговаривая особо, понимать всегда *наименьший* из них.

Просто колебанием мы будем называть процесс, описываемый близкой к периодической функцией. Функцию $f_1(t)$ будем называть близкой к периодической, если существует такая периодическая функция $f(t)$, что для любого t

$$\left| f_1(t) - f(t) \right| \le \varepsilon, \tag{2}$$

где $\varepsilon = const > 0$ – малая величина, много меньшая среднего значения $\left| f_1(t) \right|$ на том интервале, где функцию $f_1(t)$ можно считать близкой к периодической. Период функции $f(t)$ будем называть условным периодом функции $f_1(t)$.

Определение (2) потребовалось нам потому, что большинство происходящих в природе колебательных процессов являются не строго периодическими, а приближенно, т. е. описываются как раз близкими к периодическим функциями. В то же время во многих случаях движение[3] системы можно с достаточной точностью считать чисто периодическими и, стало быть, такие движения также представляют собой обширный класс колебаний. Как мы увидим в дальнейшем, важнейшее место среди них занимают гармонические, или синусоидальные, колебания.

§12.1. Гармонические колебания

Гармоническим называется периодическое колебание, происходящее по закону синуса или косинуса. В общем виде оно может быть записано следующим образом:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{3}$$

где $x(t)$ – координата системы, а постоянные величины $A > 0$, $\omega > 0$ и φ_0 называются соответственно амплитудой, круговой (циклической) частотой и начальной фазой колебания. Аргумент косинуса $\omega t + \varphi_0$, являющийся линейной функцией времени, носит название фазы колебания. Очевидно, при $t = 0$ эта фаза совпадает с начальной. Из (3) и (1) нетрудно получить период колебаний: при изменении t на период фаза должна измениться на 2π, т. е.

$$\omega T = 2\pi, \tag{4}$$

откуда

---

[1] Если рассматриваемая система немеханическая, то координатами, определяющими число ее степеней свободы, мы будем называть независимые параметры, однозначно задающие состояние системы (например, ток в колебательном контуре).

[2] Такое определение относится, строго говоря, лишь к функции, заданной на полубесконечном интервале. Если область ее определения ограничена, то нужно еще добавить, что t не должно подходить к правой границе этой области ближе, чем на T (иначе $f(t+T)$ выйдет из области определения). Мы будем считать это условие в (1) выполненным.

[3] Здесь и далее термин «движение» применяется в обобщенном смысле и означает изменение во времени координат системы, определяющих число ее степеней свободы.

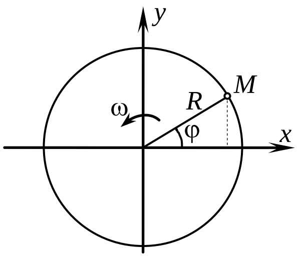
$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{5}$$

Вводят еще линейную частоту колебаний ν – величину, обратную периоду и в 2π раз меньшую циклической частоты:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует, что ω и ν измеряются в 1/с; для ν (но не для ω!) эта единица называется герцем (Гц).

Пример. Найдем закон движения точки M, движущейся с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R, в проекции на какую-либо из координатных осей (например x, рис. 1).



α

Очевидно,

$$x(t) = R\cos\varphi = R\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{7}$$

т. е. x-проекция точки M совершает гармоническое колебание с амплитудой R, частотой ω и начальной фазой φ_0, зависящей от того момента (часто произвольно выбираемого), когда начат отсчет времени.

Закон движения M вдоль оси y будет отличаться от (7) только начальной фазой, сдвинутой (уменьшенной) на $\pi/2$.

Приведенный пример является кинематическим, ибо в нем мы *описывали заданное движение* точки. Однако наибольший физический интерес представляет как раз анализ тех условий, при которых в исследуемой системе *возникает* колебательное движение. В этой лекции мы будем рассматривать лишь такие системы, в которых могут существовать так называемые *свободные колебания*.

Свободными называются колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил[4] после того, как она была выведена внешним воздействием из положения равновесия. Свободные колебания всегда затухающие, ибо в реальных системах неизбежны потери энергии, полученной при внешнем «толчке». В идеализированном случае системы без потерь свободные колебания (продолжающиеся как угодно долго) называются *собственными*. Если потери энергии малы, то свободные колебания практически можно считать собственными, и мы часто, имея это в виду, не будем делать между ними различия. *Системы, в которых могут происходить свободные колебания, называются колебательными.*

Какими же свойствами должна обладать система, чтобы в ней могли возникнуть свободные колебания? Уже из их определения следует, что система должна иметь положение устойчивого равновесия, при выходе из которого появляется возвращающая сила. Этому положению соответствуют, как известно, минимум потенциальной энергии системы.

Как мы увидим ниже, при свободных колебаниях происходит периодическое или почти периодическое преобразование энергии из одного вида в другой. Для этого система должна содержать элементы, могущие накапливать эти виды энергии. И наконец, потери энергии не могут быть слишком высокими, иначе движение системы окажется неколебательным[5].

Итак, для того чтобы представлять собой колебательную систему, последняя должна:

1) обладать потенциальной энергией, имеющей точку минимума (в механических системах – это наличие поля тяжести, упругой пружины и т. п., в электрических – присутствие емкости, могущей запасать электростатическую потенциальную энергию);

2) содержать накопители энергии иного вида (т. е. массу – носитель кинетической энергии в механике и индуктивность, запасающую энергию магнитного поля – в электричестве);

3) иметь малое затухание (см. ниже).

Рассмотрим теперь несколько колебательных систем, удовлетворяющих перечисленным свойствам, причем ограничимся сперва предельным случаем полного отсутствия потерь.

1. Математический маятник. Это – материальная точка, подвешенная в поле тяжести на невесомой и нерастяжимой нити (рис. 2). Если отклонить маятник от вертикали (положения равновесия), то появится возвращающая сила, и если его отпустить, то возникнут колебания. Для их описания воспользуемся естественным способом задания движения $_{\text{точки}}$ (см. лекцию 1). Выберем на траектории её движения (дуге радиуса l) начало отсчета – точку O, совпадающую с положением равновесия маятника, и положительное направление отсчета координаты S – длины дуги. Отклоним маятник на угол α от вертикали и напишем II закон Ньютона в проекции на касательное направление (пренебрегая силами трения):

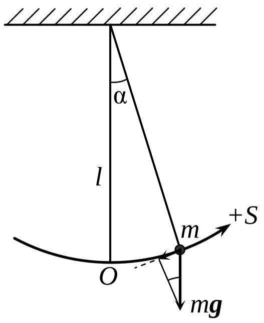


Рис. 2

$$m\ddot{S} = -mg\sin\alpha = -mg\sin\frac{S}{l}, \tag{8}$$

где через $\ddot{S}$ обозначена вторая производная координаты по времени (т. е. ускорение), а

[4] Этими силами могут быть электростатические или сторонние электродвижущие силы.

[5] Определение элементов, образующих колебательную систему, порой требует достаточно тщательного анализа. Если для электрического колебательного контура все очевидно, то в случае механической колебательной системы необходимы некоторые уточнения. Например, система, состоящая из груза и пружины со *свободным* концом, не является колебательной (свободных колебаний в ней возникнуть не может). Необходимо еще *прикрепить* этот конец к неподвижному (т. е. достаточно массивному) упору. Если не включать этот упор в нашу систему, то тогда периодическая сила, действующая с его стороны на пружину при колебаниях груза, будет *внешней* и данное нами определение свободных колебаний окажется некорректным. Стало быть, груз на пружине только тогда будет образовывать колебательную систему, когда мы включим в нее еще и массивный упор, к которому прикрепим свободный конец пружины. Точно так же маятник сам по себе, вне поля тяжести, не представляет собой колебательной системы, для образования которой необходимо поле тяжести считать не внешним, а неотъемлемым элементом нашей системы.

знак «минус» соответствует всегда противоположным направлениям силы и смещения. Ограничимся случаем малых колебаний маятника, т. е. положим

$$\sin\frac{S}{l} \approx \frac{S}{l}. \qquad (9)$$

Тогда возвращающая сила получается пропорциональной смещению S и уравнение (8) может быть переписано в виде

$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0, \qquad (10)$$

где введено обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}. \qquad (11)$$

Это – дифференциальное уравнение второго порядка, ибо в него входит помимо неизвестной функции $S(t)$ и её вторая производная. Существует определенная методика решения таких уравнений, на которой мы, однако, останавливаться не будем, а приведем лишь окончательный результат:

$$S(t) = S_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (12)$$

т. е. решением (10) является как раз гармоническое колебание с амплитудой (максимальным отклонением от положения равновесия) S_0, круговой частотой ω_0, называемой собственной, и начальной фазой φ_0.

Из трех параметров решения S_0, ω_0, φ_0 лишь один (ω_0) входит в исходное уравнение (10), а потому определяется свойствами колебательной системы (длиной l и ускорением g). Два других совершенно произвольны и находятся из начальных условий, т. е. зависят от положения и скорости массы m в начальный момент времени. Предоставляем читателю непосредственным дифференцированием убедиться в том, что (12) действительно является решением уравнения (10). В математике показывается, что это решение является общим, т. е. что других функций, удовлетворяющих (10), не существует[6].

Итак, собственная частота малых колебаний математического маятника определяется формулой (11) и *не зависит* от амплитуды. Период таких колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (13)$$

(формула Гюйгенса). При больших амплитудах соотношение (9) перестает выполняться, возвращающая сила оказывается уже не пропорциональной смещению и колебания становятся не гармоническими.

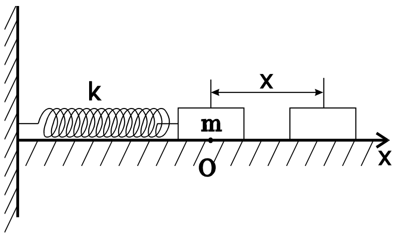


Рис. 3.

2. Колебания груза на пружине (рис. 3). Выбирая нуль x – координаты груза в точке, соответствующей недеформированному состоянию пружины и пренебрегая трением, можно записать

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad (14)$$

где F_x – проекция силы упругости на ось x. Если колебания малы, то выполняется закон Гука, т. е. сила оказывается пропорциональной смещению:

$$F_x = -kx, \qquad (15)$$

где $k > 0$ – коэффициент жесткости, а знак «минус» показывает, что сила возвращающая: при положительных x она отрицательна, при отрицательных, наоборот, положительна (пружина сжата). Тогда (14) примет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (10')$$

что совпадает с (10), только через ω_0 здесь обозначена величина

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (16)$$

Таким образом, и в этом случае мы приходим к гармоническому колебанию, амплитуда и начальная фаза которого определяются начальными условиями, а собственная частота ω_0 – свойствами колебательной системы.

3. Колебательный (LCR) **контур**[7] (рис. 4). В качестве «координаты» системы выберем заряд q (могущий быть и отрицательным) на правой обкладке конденсатора. Такому выбору соответствует указанное на рисунке положительное направление тока I в контуре. Действительно, поскольку $I = \dot{q}$, положительным должен считаться ток, приводящий к *увеличению* q (как положительной считается скорость $\upsilon = \dot{x}$, вызывающая возрастание координаты x). Тогда, применяя обобщенный закон Ома к участку цепи $1LR2$, можно написать[8]

---

[6] Очевидно, сумма двух (и большего числа) решений (12), различающихся амплитудами S_0 и фазами φ_0, также удовлетворит уравнению (10). Однако, как известно (см., например, следующую лекцию), сумма синусоид одинаковой частоты представляет собой одну синусоиду той же частоты, т. е. опять решение (12).

[7] Рассмотрение сразу проводится для контура с потерями, ибо полученные из него соотношения понадобятся нам в дальнейшем.

[8] Мы рассматриваем квазистационарные, т. е. достаточно медленные процессы, к которым в каждый момент времени могут быть применены законы постоянных токов.

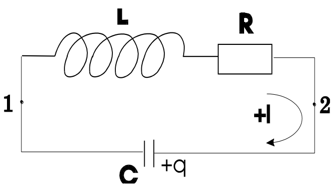


Рис. 4.

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L\dot{I}. \tag{17}$$

Учитывая, что $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{C} q$ и $\dot{I} = \ddot{q}$, перегруппировав в (17) слагаемые, получим

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = 0,$$

откуда в пренебрежении потерями (т. е. при $R \to 0$) следует уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{10''}$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{19}$$

и представляет собой, очевидно, собственную частоту колебаний заряда на конденсаторе.

Из решения $(10'')$

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

(q_0 и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний заряда) может быть получено выражение для тока в контуре

$$I(t) = \dot{q}(t) = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{20}$$

из которого видно, что ток тоже меняется по гармоническому закону с той же частотой ω_0, но с амплитудой, большей q_0 в «ω_0 раз», и своей начальной фазой.

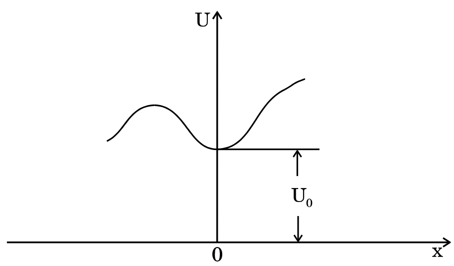


Рис. 5.

Из приведенных примеров явствует, что гармонические колебания в механических системах возникают там, где имеется возвращающая сила, пропорциональная смещению из положения равновесия. Но такая ситуация, *если колебания малы*, реализуется на практике очень часто, а потому гармонические колебания чрезвычайно распространены. Чтобы понять, почему это так, рассмотрим поведение какой-либо системы вблизи положения устойчивого равновесия. Пусть график зависимости её потенциальной энергии U от координаты x качественно имеет вид, представленный на рис. 5 (начало отсчета x выбрано в минимуме U). Разложим функцию $U(x)$ в окрестности точки $x = 0$ в ряд Тейлора:

$$U(x) = U_0 + U'\big|_{x=0} x + \frac{1}{2} U''\big|_{x=0} x^2 + \ldots \tag{21}$$

Здесь $U_0, U'\big|_{x=0}, U''\big|_{x=0}$ – *постоянные* коэффициенты при соответствующих степенях переменной x. Чем меньше x, тем с большей точностью можно отбросить члены высших порядков. Поскольку точка $x = 0$ есть точка минимума,

$$U'\big|_{x=0} = 0, U''\big|_{x=0} \geq 0 \tag{22}$$

и (21) принимает вид

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2} kx^2 + .., \tag{23}$$

где введено обозначение $U''\big|_{x=0} = k$.

При малом смещении из положения равновесия в любую сторону потенциальная энергия системы меняется (возрастает) и возникает сила, x-проекция которой по аналогии с (2л11) и (3л11)

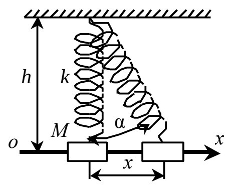
$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \tag{24}$$

Подставляя сюда (23), получим

$$F_x \approx -kx, \tag{25}$$

т. е. сила оказывается, естественно, возвращающей и *пропорциональной* смещению. Таким образом, практически любые *малые* колебания являются гармоническими[9]. В этом – одна из причин той важной роли, которую они игра-

[9] Может оказаться, что и $U''\big|_{x=0} = 0$. В этом случае первый отличный от нуля член разложения $U(x)$ дает силу, уже не пропорциональную смещению, и даже малые колебания оказываются негармоническими. В качестве примера подобной ситуации рассмотрим систему, изображенную на рис. Муфта M на пружине скользит по жесткой направляющей ox, причем в положении равновесия пружина недеформирована. Тогда при отклонении муфты на x пружина удлиняется на $\Delta l = \frac{h}{\cos\alpha} - h = h\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} \approx h(1-\cos\alpha) \approx h\frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{x^2}{2h}$ и возникает возвращающая сила $F_x = -k\Delta l \sin\alpha \approx -\frac{kx^3}{2h^2}$.



ют в теории колебаний.

Другая причина имеет большее отношение к радиотехнике и связана с известной теоремой Фурье. Согласно этой теореме всякую (кусочно-непрерывную) периодическую функцию с периодом T можно представить в виде бесконечной суммы гармонических функций (гармоник) с периодами T, $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T$,..., и вполне определенными амплитудами и начальными фазами. Поэтому, изучив свойства гармонических функций и их преобразование различными радиотехническими устройствами, часто (но не всегда; это зависит от устройства!) можно судить о свойствах и трансформации любого периодического сигнала, проходящего через эти устройства.

§12.2. Энергия гармонических колебаний

Существенным в любом колебании является периодический (или почти периодический) переход энергии из одной формы в другую. Стало быть, энергия (ее значение в данный момент) тоже колеблется. Проследим за этими колебаниями на двух примерах консервативных систем: груза на пружине (рис. 5) и колебательного контура без потерь.

Пусть координата груза и заряд даются соответственно выражениями

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t; \quad q(t) = q_0\cos\omega_0 t, \tag{26}$$

где начальная фаза (очевидно, без ограничения общности) положена равной нулю. Тогда потенциальная энергия пружины U и энергия заряженного конденсатора (энергия электрического поля) W_ε равны

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2}x_0^2\cos^2\omega_0 t = \frac{kx_0^2}{2}\frac{1+\cos2\omega_0 t}{2}, \\ W_\varepsilon(t) &= \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2C}q_0^2\cos^2\omega_0 t = \frac{q^2}{2C}\frac{1+\cos2\omega_0 t}{2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, энергии U и W_ε тоже меняются по гармоническому закону, однако не около нуля, а около некоторого своего среднего значения ($\frac{kx_0^2}{4}$ и $\frac{q_0^2}{4C}$), причем колеблются они с *удвоенной частотой* $2\omega_0$ (рис. 6). С этой же частотой, конечно, колеблются и кинетическая энергия груза w и энергия тока (магнитного поля) W_μ , в которые и переходят периодически U и W_ε . Действительно, из (26)

$$\begin{aligned} \upsilon &\equiv \dot{x}(t) = -x_0\omega_0\sin\omega_0 t, \\ I &\equiv \dot{q}(t) = -q_0\omega_0\sin\omega_0 t, \end{aligned} \tag{28}$$

так что

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}x_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{kx_0^2}{2}\frac{1-\cos2\omega_0 t}{2}, \\ W_\mu(t) &= \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2}q_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{q_0^2}{2C}\frac{1-\cos2\omega_0 t}{2}. \end{aligned} \tag{29}$$

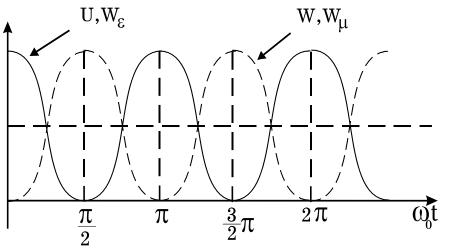


Рис. 6.

Колебания w и W_μ происходят с той же амплитудой и частотой, что и U и W_ε, но в противофазе с ними (рис. 6). Дважды за период потенциальная энергия пружины достигает максимального значения: при отклонении груза в одну сторону от положения равновесия и в другую. Кинетическая энергия тоже два раза проходит через максимум (но, понятно, в другие моменты времени): один раз при $\upsilon > 0$, другой – при $\upsilon < 0$. Аналогичные колебания энергии происходят в LC-контуре. Из (27) и (29)

$$\begin{aligned} U(t) + w(t) &= const, \\ W_\varepsilon(t) + W_\mu(t) &= const, \end{aligned} \tag{30}$$

что находится, разумеется, в полном согласии с законом сохранения энергии (ведь рассматриваемые системы консервативны).

Проведенный сравнительный анализ колебаний груза на пружине и заряда в колебательном контуре и превращений энергии при колебаниях позволяет установить определенные физические аналогии между рядом характеристик этих колебательных систем. И из уравнений движения (10′) и (10″), и из (27) и (29) с очевидностью следует, что аналогом массы и жесткости являются соответственно индуктивность и величина, обратная емкости:

$$m \leftrightarrow L; \quad k \leftrightarrow \frac{1}{C}. \tag{31}$$

Далее, смещению x соответствует заряд q, а скорости υ – ток I:

$$x \leftrightarrow q; \quad \upsilon \leftrightarrow I. \tag{32}$$

И, наконец, потенциальной и кинетической энергиям соответствуют энергии зарядов и тока:

$$\frac{kx^2}{2} \leftrightarrow \frac{q^2}{2C}; \quad \frac{m\upsilon^2}{2} \leftrightarrow \frac{LI^2}{2}. \tag{33}$$

§12.3. Затухающие колебания

Любое свободное колебание является затухающим, ибо в реальной системе всегда имеются потери энергии. В механике их причина – в присутствии различного рода сил трения, в электричестве – электрического сопротивления. Наиболее часто встречающийся вид трения в механических системах – это жидкое трение[10]; им мы и ограничимся в нашем рассмотрении.

Сила жидкого (вязкого) трения, испытываемого телом при его движении в жидкой или газообразной среде, направлена навстречу скорости этого тела $\boldsymbol{v}$ относительно среды и пропорциональна ей

$$\boldsymbol{F}_{сопр} = -h\boldsymbol{v}, \tag{34}$$

где h – постоянный коэффициент, называемый коэффициентом вязкого трения и зависящий от свойств среды и формы и размеров тела. При наличии такой силы уравнение движения, например, груза на пружине (рис. 3) примет вид

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}, \tag{35}$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{36}$$

где

$$\delta = \frac{h}{2m} \tag{37}$$

– размерный параметр, называемый коэффициентом затухания, а ω_0 – собственная частота, определяемая (16). К такой же форме, очевидно, может быть приведено уравнение малых свободных колебаний практически любой механической системы, где действует вязкое трение (разумеется, коэффициенты δ и ω_0 всякий раз будут своими).

Уравнение колебаний в LCR-контуре уже получено нами ранее (соотношение (18)), и оно тоже приводится к виду (36), если положить в нем

$$\delta = \frac{R}{2L}. \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует аналогия

$$h \leftrightarrow R. \tag{39}$$

Уравнение (36) представляет собой уравнение затухающих колебаний. Его общим решением является функция[11]

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{40}$$

где

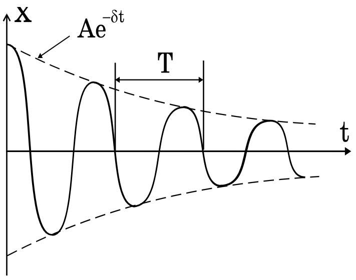


Рис. 7.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \tag{41}$$

а A и φ_0 по-прежнему определяются начальными условиями. График функции (40) приведен на рис. 7. Величину $Ae^{-\delta\tau}$ по аналогии с гармоническим колебанием нестрого называют амплитудой колебания; она убывает по экспоненциальному закону (тем быстрее, чем больше коэффициент затухания, т. е. потери в системе). Тогда константу ω можно (тоже нестрого) назвать частотой затухающего колебания, а обратную (с точностью до 2π) ей величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{42}$$

– его периодом (часто T называют условным периодом)[12]. Если δ мало ($\delta^2 \ll \omega_0^2$), то свободные колебания происходят на частоте, близкой к собственной. С ростом затухания колебания *замедляются*, т. е. ω, все дальше отходя от ω_0, уменьшается. При

$$\delta \geq \omega_0 \tag{43}$$

выражение (41) теряет смысл, движение системы качественно меняется и становится неколебательным (апериодическим). Именно в этом смысле и имелась в виду малость затухания, когда формулировались условия существования свободных колебаний в системе.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется периодическим колебанием? Просто колебанием? Гармоническим колебанием? Свободным колебанием? Собственным колебанием?

---

[10] Все трущиеся детали механизмов обычно смазываются маслом. При движении тел в газе сила его сопротивления (если скорости не очень велики) также носит характер силы жидкого трения.

[11] Не останавливаясь на методах решения уравнения (36), предлагаем читателю непосредственным дифференцированием убедиться в верности решения (40).

[12] При соответствующем выборе ε (см.(2)) функцию (40) можно считать близкой к периодической.

2. Что называется колебательной системой? Сформулировать требования, предъявляемые к такой системе.

3. Найти периоды собственных колебаний математического маятника и груза на пружине, а также колебательного контура.

4. Почему практически любое малое колебание в системе без потерь является гармоническим?

5. Показать, что энергия любого вида в колебательной системе без потерь колеблется с удвоенной собственной частотой.

6. Вывести уравнение затухающих колебаний для механической и электрической колебательных систем и написать его решение. Что такое коэффициент затухания? При какой его величине колебательное движение переходит в апериодическое?

7. Какие параметры колебательного контура являются аналогами массы, жесткости, коэффициента вязкого трения? В каком смысле следует понимать эту аналогию?

Лекция 20

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вынужденными называются колебания, происходящие под действием внешней (вынуждающей) периодической силы, параметры которой определяются воздействующим устройством и не зависят от происходящих в системе колебаний. При вынужденных колебаниях, таким образом, в отличие от свободных, эта сила не только сообщает системе начальный «толчок», но и продолжает действовать на протяжении всего времени наблюдения. При этом система, вообще говоря, не обязательно должна быть колебательной, т. е. иметь собственную частоту колебаний. Например, возвратно-поступательное движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания или колебания заряда на обкладках конденсатора, включенного в цепь переменного тока, представляют собой вынужденные колебания как раз неколебательных систем. Движение в этом случае навязывается системе внешней силой, она не обязана иметь собственную частоту.

Однако наибольший интерес представляют вынужденные колебания системы с собственной частотой ω_0, благодаря наличию которой она существенно по-разному откликается на внешнее воздействие в зависимости от его частоты. Именно такую ситуацию мы и будем исследовать в настоящей лекции, причем ограничимся наиболее интересным случаем гармонического воздействия.

§12.4. Уравнение вынужденных гармонических колебаний

Рассмотрим примеры механической и электрической колебательных систем, в которых могут происходить вынужденные колебания. Это – обычные колебательные системы, скажем, груз на пружине и колебательный контур, подвергающиеся внешнему гармоническому воздействию. Как же на практике оно может быть осуществлено?

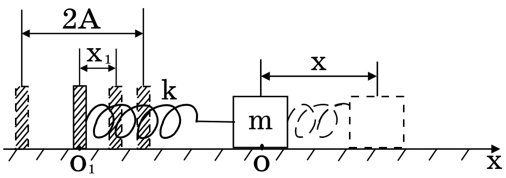


Рис. 1

В случае механической системы такое воздействие может быть реализовано, если, например, грузу сообщить некоторый заряд и всю систему поместить в продольное переменное электрическое поле. Тогда на возвращающую (внутреннюю) упругую силу наложится кулоновская (внешняя), меняющаяся по заданному закону.

Однако то же воздействие может быть достигнуто значительно проще, если просто двигать гармонически с произвольной частотой «закрепленный» конец пружины (рис. 1). Действительно, при таком движении пружина будет испытывать *дополнительную* деформацию, которая и вызовет добавочную гармоническую силу, действующую на груз[13]. Если x_1 и x – смещения соответственно левого и правого концов пружины от начальных точек O_1 и O, соответствующих её недеформированному состоянию (рис. 1), то, очевидно, удлинение пружины $\Delta l = x - x_1$ и уравнение движения груза примет вид (см. 35л19)

$$m\ddot{x} = -k(x - x_1) - h\dot{x}, \qquad (1)$$

где h, напомним, коэффициент жидкого трения, определяемый соотношением (34л19). Пусть левый конец пружины движется по закону

$$x_1(t) = A\cos\omega t,$$

где A и ω – *произвольные* амплитуда и частота. Тогда вместо (1) получим

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = kA\cos\omega t,$$

или, вводя обозначения $\delta = \dfrac{h}{2m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ и $F_0 = kA$,

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t. \qquad (2)$$

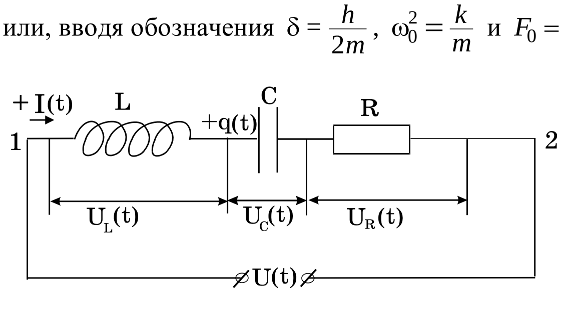


Рис. 2

Это и есть уравнение вынужденных колебаний (в приведенном виде). Его левая часть совпадает с левой частью уравнения (36л19) затухающих колебаний, в правой же части вместо нуля стоит заданная (гармоническая) функция времени, характеризующая внешнее воздействие.

На электрическую колебательную систему – колебательный контур – внешнее воздействие может быть оказано, если разорвать контур в любом месте и образовавшиеся концы подключить к источнику внешнего напряжения, который меняет его по заданному закону (рис. 2). Складывая напряжения на различных участках контура (с учетом выбранных на рис. 2 положительных направления тока I и знака заряда конденсатора q), получим:

[13]Именно эту добавочную силу и следует считать внешней, фигурирующей в определении вынужденных колебаний.

$$L\dot{I}+\frac{1}{C}q+IR=\varphi_1-\varphi_2\,. \qquad (3)$$

Если внешнее напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2$ меняется по гармоническому закону

$$U(t) = U_0 \cos \omega t,$$

то уравнение (3) принимает вид ($I=\dot{q}$)

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=U_0\cos\omega t$$

и после использования обозначений §§12.1 и 12.3 $\delta=\frac{R}{2L}$, $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ мы получаем уравнение вынужденных электрических колебаний, аналогичное (2):

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{U_0}{L}\cos\omega t\,. \qquad (4)$$

Решение дифференциальных уравнений (2) и (4) может быть найдено с помощью так называемого метода векторных диаграмм.

§12.5. Метод векторных диаграмм

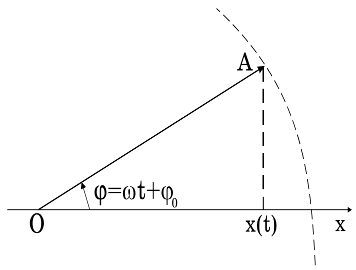


Рис. 3

Рассматривая в предыдущей лекции (в качестве примера) равномерное вращение точки по окружности, мы видели, что её проекции на оси координат, проходящие через центр этой окружности, колеблются по гармоническому закону. Очевидно, что и наоборот, каждому гармоническому колебанию

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (5)$$

с амплитудой A, круговой частотой ω и начальной фазой φ_0 может быть поставлен в соответствие вектор длины A, вращающийся (против часовой стрелки) вокруг своего начала O (рис. 3) с угловой скоростью ω и составляющий в данный момент с выбранной осью, лежащей в плоскости вращения и обычно проходящей через точку O, угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$. При этом проекция конца вектора на выбранную ось будет как раз в точности совершать колебание (5). *Графическое представление гармонического колебания с помощью вращающегося вектора называется векторной диаграммой.*

Главным (и, по сути, единственным) содержанием введенного представления является возможность просто и наглядно, геометрически, производить с его помощью сложение двух (и более) гармонических колебаний *одной частоты*[14]. Действительно, поставим в соответствие складываемым колебаниям

$$x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_{10}),\;\; x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_{20})$$

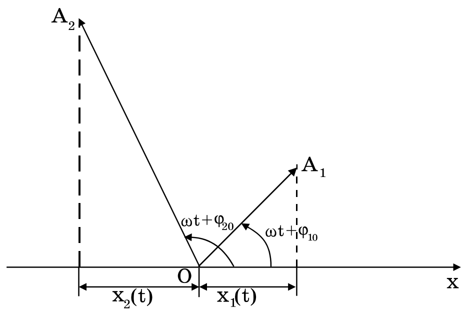


Рис. 4

два вектора $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ и приведем их к общему началу O. Оба они, очевидно, будут вращаться вокруг точки O с одинаковой угловой скоростью ω (рис. 4). С этой же скоростью, конечно, будет вращаться и суммарный вектор $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$. Очевидно, далее, что сумма проекций x_1 и x_2 векторов $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ на ось x в каждый момент времени равна проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на эту ось. Эта последняя будет меняться тоже по гармоническому закону с частотой ω. Таким образом, мы приходим к утверждению, что сумма двух колебаний одной частоты равна гармоническому колебанию той же частоты:

$$x_1(t)+x_2(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_{10})+A_2\cos(\omega t+\varphi_{20})=A\cos(\omega t+\varphi_0). \qquad (6)$$

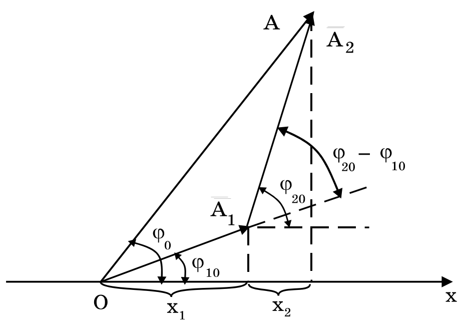


Рис. 5

Для вычисления его амплитуды и начальной фазы нарисуем векторную диаграмму складываемых колебаний для нулевого момента времени (рис. 5). Применяя теорему косинусов к треугольнику, образованному векторами $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}$, получим

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10}). \qquad (7)$$

Из рис. 5, далее, с очевидностью следует[15], что

$$\mathrm{tg}\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20}}. \qquad (8)$$

Итак, вместо того, чтобы суммировать по тригонометрическим фор-

[14] Этим методом можно исследовать также наложение колебаний с близкими частотами (так называемые биения).

[15] Нетрудно убедиться, что выражения (7) и (8) справедливы при произвольных величинах (и знаках) углов φ_{10} и φ_{20}.

мулам гармонические колебания, мы представили эти колебания в виде проекций вращающихся векторов и сложили сами векторы. Взяв проекцию полученного вектора, мы вновь перешли к гармоническому колебанию, являющемуся в силу вышесказанного суммой исходных колебаний. Такие вычисления (особенно в случае нескольких слагаемых) оказываются значительно проще и нагляднее тригонометрических.

Прежде чем применять описанный метод для анализа вынужденных колебаний, рассмотрим поведение отдельно *R*, *L* и *C*-элементов в цепи переменного тока.

§12.6. *R, L, C*-элементы в цепи переменного тока

Подключим по очереди каждый из элементов колебательного контура рис. 2 к источнику переменного напряжения

$$U(t)=U_0\cos\omega t \tag{9}$$

и найдем текущий через этот элемент ток I[16].

В случае резистора (рис. 6а) по закону Ома для участка цепи в любой момент времени

$$I(t)=\frac{U(t)}{R}=\frac{U_0}{R}\cos\omega t=I_0\cos\omega t\,, \tag{10}$$

т. е. ток меняется *в фазе с напряжением* (рис. 7а), а его амплитуда

$$I_0=\frac{U_0}{R}\,. \tag{11}$$

Используя уже обобщенный закон Ома для участка цепи с индуктивностью (рис. 6б), можно написать

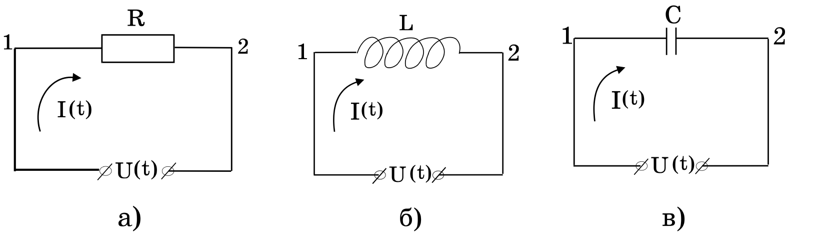


Рис. 6

$$IR_L=\varphi_1-\varphi_2-L\dot{I}\,, \tag{12}$$

где R_L – омическое сопротивление индуктивности. Полагая $R_L = 0$ (мы рассматриваем «чистую» индуктивность), вместо (12) получим ($\varphi_1 - \varphi_2 = U$)

$$\dot{I}(t)=\frac{U(t)}{L}=\frac{U_0}{L}\cos\omega t\,. \tag{13}$$

Это – дифференциальное уравнение, решение которого легко угадывается. В самом деле, мы должны подобрать такую функцию $I(t)$, производная которой пропорциональна $\cos\omega t$. Но такой функцией является, очевидно, $\sin\omega t$. Стало быть, общее[17] решение (13) есть

$$I(t)=\frac{U_0}{\omega L}\sin\omega t+C\,, \tag{14}$$

где C – произвольная постоянная (которая при дифференцировании исчезает). Физически она означает наличие постоянного тока произвольной величины, текущего «по инерции» и не требующего для своего поддержания никакого напряжения (ведь сопротивление R_L нашего участка в точности равно нулю). Поскольку любая индуктивность на практике имеет все же конечное сопротивление (так что этот постоянный ток с течением времени обязательно затухнет), без ограничения общности можно положить $C = 0$[18] и вместо (14) написать

$$I(t)=\frac{U_0}{\omega L}\sin\omega t=I_0\sin\omega t\,. \tag{15}$$

Таким образом, ток, текущий через индуктивность меняется тоже по гармоническому закону с амплитудой

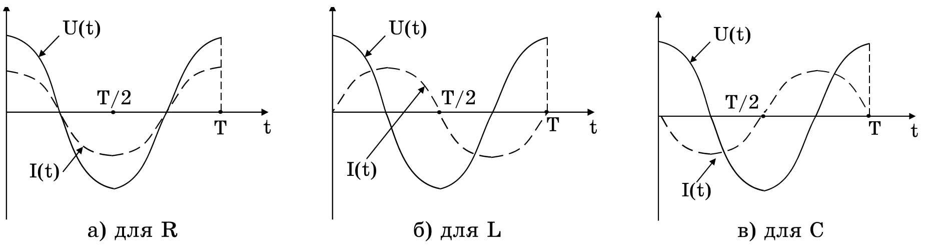


Рис. 7

$$I_0=\frac{U_0}{\omega L}\,, \tag{16}$$

но оказывается *сдвинутым по фазе* по отношению к питающему напряжению: он *отстает* от напряжения на четверть периода (рис. 7б).

Для расчета тока, текущего через конденсатор (рис. 6в), необходимо учесть, что напряжение, действующее на нем, в любой момент времени связано с зарядом q на его обкладках известным соотношением

---

[16] Под током, текущим через конденсатор, понимается ток, текущий по подводящим проводам и приводящий к его периодической перезарядке.

[17] Можно показать, что общее решение любого дифференциального уравнения с производными не выше *первого* порядка обязательно содержит *одну* произвольную постоянную.

[18] В сверхпроводниках такие постоянные токи могут действительно существовать неограниченно долго и пренебречь ими, конечно же, нельзя, однако это уже другая задача.

$$q(t) = CU(t). \tag{17}$$

Поскольку $U(t)$ со временем меняется, меняться будет и заряд каждой обкладки конденсатора, стало быть, по подводящим проводам должен течь какой-то ток I. Его можно найти, продифференцировав (17) по времени:

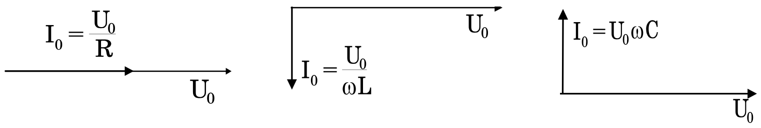
$$I(t)=\dot{q}(t)=C\dot{U}(t)=CU_0\frac{d}{dt}(\cos\omega t)=-\omega CU_0\sin\omega t=-I_0\sin\omega t\,. \tag{18}$$

Отсюда видно, что ток, текущий и в этой цепи, меняется по гармоническому закону с амплитудой

$$I_0 = \omega CU_0 \tag{19}$$

и оказывается тоже *сдвинутым по фазе* по отношению к напряжению. Однако здесь он *опережает* напряжение на четверть периода (рис. 7в).

На рис. 8 представлены векторные диаграммы токов, текущих через каждый из рассмотренных элементов, и напряжений, действующих на них. Данные диаграммы соответствуют нулевому моменту времени, когда $\cos\omega t = 1$ и напряжение достигает амплитудного значения. Каждый вектор вращается с угловой скоростью ω, и соответствующая ему величина изменятся, как проекция этого вектора на горизонтальную ось. Например, мгновенное значение тока в данный момент на рис. 8в равно нулю (проекция вертикального вектора на горизонтальную ось). В следующий момент времени $\boldsymbol{I}_0$ повернется на некоторый угол против часовой стрелки и появится небольшой отрицательный ток. Одновременно повернется и вектор $\boldsymbol{U}_0$ и напряжение на конденсаторе (проекция $\boldsymbol{U}_0$) несколько упадет против своего максимального значения и т. д. (все в точном соответствии с графиком рис. 7в).



а) для R б) для L в) для C

Рис. 8

Из формул (9), (15) и (18) явствует, что *мгновенные* значения токов $I(t)$, текущих через L и C, не пропорциональны приложенному напряжению $U(t)$, ибо все они сдвинуты друг относительно друга по фазе. В то же время *амплитуды* I_0 этих токов (а также тока через резистор) в соответствии с (11), (16) и (19) оказываются пропорциональными *амплитуде* U_0 внешнего напряжения. *Отношение амплитуды действующего на участке цепи напряжения к амплитуде текущего через него тока называется сопротивлением участка переменному току*. Мы будем обозначать его буквой Z. Из (11), (16) и (19), очевидно,

$$Z_R = R,\ \ Z_L = \omega L,\ \ Z_C = \frac{1}{\omega C}\,. \tag{20}$$

Сопротивление Z_R резистора называется активным, индуктивное Z_L и емкостное Z_C сопротивления – реактивными. Чем выше частота (которой пропорциональна скорость изменения тока) и индуктивность, тем больше встречная ЭДС самоиндукции, препятствующая прохождению тока, и, стало быть, тем больше сопротивление Z_L. Для конденсатора же, наоборот, поскольку производная заряда (т. е. ток) пропорциональна его величине q (а значит, емкости C) и частоте ω, емкостное сопротивление оказывается обратно пропорциональным ωC.

Перед анализом вынужденных колебаний систем рис. 1 и 2, рассмотрим еще вопрос о мощности, развиваемой электрическими силами на участке цепи переменного тока.

§12.7. Мощность в цепи переменного тока

Пусть на участке цепи действует переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$ и по нему протекает ток[19] $I(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi)$, вообще говоря, сдвинутый по фазе относительно напряжения на некоторую величину φ (могущую быть и отрицательной). Мгновенное значение мощности, развиваемой на этом участке электрическими силами, очевидно, равно

$$P(t)=U_0I_0\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi) \tag{21}$$

и является тоже периодической функцией времени. *Среднее значение* $P_{ср}$ *этой мощности*[20] *за достаточно большой промежуток времени* $t>>T$ (а именно это значение и представляет практический интерес) *называется просто мощностью* (электрических сил) *в цепи переменного тока* и определяется средним значением (21) *за период*. Действительно, если рассматриваемый интервал t содержит целое число периодов, то это очевидно (ибо через период «все повторяется»). Если же в нем присутствует еще какая-то часть периода ΔT, то, вообще говоря, $P_{ср}$ немного изменится (против среднего за период). Но если промежуток t содержит достаточно много периодов, то вклад ΔT в общую работу, очевидно, окажется пренебрежимо малым и им вполне можно пренебречь.

Итак, для вычисления $P_{ср}$ достаточно усреднить (21) по периоду. Преобразуя произведение косинусов в их сумму, получим

$$P(t)=\frac{U_0I_0}{2}\left[\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi\right]. \tag{22}$$

Первый член в (22) – периодическая функция с периодом $T/2$. её среднее значение за время T, очевидно, равно нулю (оно равно нулю даже за $T/2$). Второй член в (22) есть просто константа (от времени не зависит), значение которой при усреднении по любому отрезку времени не меняется. Стало быть,

[19] Если цепь имеет разветвления, то под током понимается ток, втекающий в этот участок и вытекающий из него по подводящим проводам.

[20] Под средней мощностью силы за некий интервал времени понимают отношение работы силы за этот интервал к его длительности.

$$P_{ср}=\frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi\,. \qquad (23)$$

Таким образом, мощность, развиваемая электрическими силами в цепи переменного тока, определяется, помимо значений амплитуд тока и напряжения, еще *сдвигом фаз* φ между ними (косинус – четная функция, и знак φ в (23) несуществен).

Появление фактора $\cos\varphi$ в выражении для мощности обусловлено, конечно, присутствием в цепи реактивных элементов – емкости и индуктивности. При подключении любого из них к источнику переменного напряжения $\cos\varphi = 0$ (рис. 7) и *средняя* за период мощность оказывается тоже равной нулю. Физически это объясняется тем, что каждый из этих элементов является накопителем энергии и при воздействии переменного напряжения периодически «принимает» энергию и отдает её обратно во внешнюю цепь. Если участок содержит комбинацию реактивных элементов и резисторов, то $\cos\varphi$ оказывается уже не равным нулю и этот участок начинает потреблять энергию.

Если рассматриваемая цепь состоит только из резисторов, имеющих эквивалентное сопротивление R, то $\cos\varphi = 1$ и выражение (23) принимает вид

$$P_{ср}=\frac{U_0 I_0}{2}\,, \qquad (24)$$

что после подстановки (11) дает

$$P_{ср}=\frac{I_0^2}{2}R=\frac{U_0^2}{2R}\,. \qquad (25)$$

Эти соотношения очень похожи на формулы для мощности джоулевых потерь в случае постоянного тока

$$P_{дж}=I^2 R=\frac{U^2}{R}\,.$$

Таким образом, с точки зрения выделяемой на сопротивлении мощности переменный ток с амплитудой I_0 эквивалентен постоянному току величины $I=I_0/\sqrt{2}$. То же, очевидно, можно сказать и о напряжении. *Величина $I_{эф}$ постоянного тока выделяющего на активном сопротивлении ту же тепловую мощность, что и данный переменный* (кстати, не обязательно синусоидальный) *ток, называется эффективным или действующим значением этого переменного тока.* Аналогично определяется и эффективное значение напряжения $U_{эф}$. Эти значения введены для того, чтобы избавиться от двойки в знаменателе в формулах (24) и (25) и сделать их в точности совпадающими с соответствующими формулами постоянного тока:

$$P_{ср}=U_{эф}I_{эф}=I_{эф}^2 R=\frac{U_{эф}^2}{R}\,. \qquad (26)$$

Очевидно, $I_{эф}=I_0/\sqrt{2}$ и $U_{эф}=U_0/\sqrt{2}$. Все электроизмерительные приборы имеют шкалы, проградуированные в эффективных значениях U и I. На бытовых электроприборах указывается тоже действующее значение напряжения. В дальнейшем, говоря о переменных токе или напряжении, мы всегда будем иметь в виду их эффективные значения и обозначать эти величины буквами I и U без индексов (сохранив обозначения I_0 и U_0 для амплитуд). Тогда общее выражение (23) для средней мощности $P_{ср}$, которую мы будем называть просто мощностью и обозначать как P, примет вид

$$P=UI\cos\varphi\,. \qquad (27)$$

§12.8. Закон Ома для последовательной цепи. Резонанс напряжений

Вернемся к исследованию процессов, происходящих в LCR-контуре при подаче на него переменного напряжения $U(t) = U_0\cos\omega t$ частоты ω (рис. 2). Какие напряжения возникнут при этом на его элементах? Единственное условие, которому они должны удовлетворять, – это в сумме давать $U(t)$ в любой момент времени. Такими напряжениями, очевидно, *могут быть* гармонические напряжения той же частоты ω. Действительно, как мы видели в §12.5, сумма двух (и более) гармонических колебаний частоты ω есть тоже гармоническое колебание частоты ω. Однако при этом на различных участках контура, в принципе, возможно появление и других напряжений, накладывающихся на только что упомянутые и дающих в сумме нуль в любой момент времени. Можно, тем не менее, показать, что в режиме *установившихся* колебаний этого не произойдет.[21] Стало быть, на всех элементах контура действительно установятся гармонические напряжения частоты ω. Эти напряжения согласно (10), (15) и (18) вызовут в цепи переменный ток той же частоты. Для его отыскания воспользуемся методом векторных диаграмм.

В каждый момент времени полное напряжение U на контуре равно сумме U_R, U_L, U_C. Все эти величины меняются по гармоническому закону, но сдвинуты друг относительно друга по фазе. Векторы, соответствующие этим ко-

[21] В самом деле, дополнительные напряжения должны соответствовать, очевидно, уравнению (4), но только с нулевой правой частью (ибо в сумме они дают нуль). Это – уравнение(36л19), решение которого (40л19) есть свободное затухающее колебание. Со временем оно затухнет и останется только чисто вынужденное гармоническое колебание частоты ω. Поскольку функция (40л19) содержит две произвольные постоянные, ее сумма с чисто вынужденным колебанием является *общим* решением уравнения (4). А это и означает, что никаких других напряжений на элементах контура возникнуть не может.

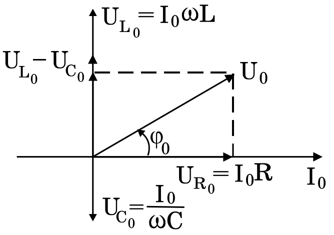


Рис. 9

лебаниям, будут поэтому повернуты тоже друг относительно друга на некоторые углы. Для нахождения их взаимной ориентации используем то обстоятельство, что ток (поскольку цепь последовательная) в любом участке цепи один и тот же (в каждый момент времени), а напряжения на каждом её элементе жестко связаны с общим током диаграммами рис. 8. Итак, направляя вектор тока горизонтально, нетрудно построить диаграмму, приведенную на рис. 9. Напряжение U_R – в фазе с током, U_L – опережает его, а U_C – отстает на π/2 (в единицах ω*t*). Сложив векторно U_L, U_C и U_R, для амплитуды полного напряжения получим

$$U_0 = I_0\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}. \qquad (28)$$

Очевидно, это напряжение опережает ток на угол φ_0 такой, что

$$tg\varphi_0 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \qquad (29)$$

т. е. если

$$U = U_0\cos\omega t,$$

то

$$I = I_0\cos(\omega t - \varphi_0). \qquad (30)$$

Соотношение (28) называют законом Ома для последовательной цепи переменного тока. Из него явствует, что амплитуда тока в контуре оказывается пропорциональной амплитуде приложенного напряжения, причем сопротивление цепи

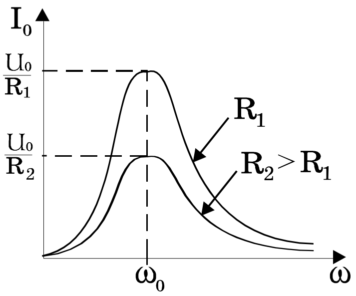


Рис.10

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \qquad (31)$$

зависит, помимо её параметров, от *частоты* внешнего воздействия. Если фиксировать U_0 и варьировать ω, то зависимость $I_0(\omega)$будет иметь ярко выраженный максимум, соответствующий минимальному значению *Z* (рис. 10). Это значение, очевидно, определяется условием $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, или

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \qquad (32)$$

где ω_0 – собственная частота контура. *Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний системы при приближении частоты внешнего воздействия к её собственной частоте называется резонансом.*

Из (28) максимальное (резонансное) значение амплитуды тока

$$I_{0max} = \frac{U_0}{R} \qquad (33)$$

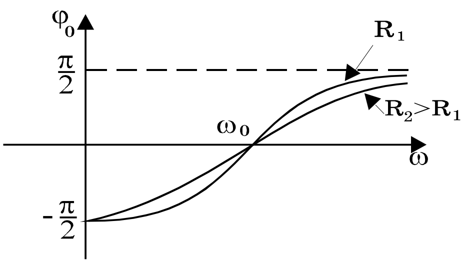


Рис. 11

растет с уменьшением активного сопротивления *R*. При $R \to 0$ $I_{0max} \to \infty$. Физически это совершенно понятно, ибо потерь в контуре нет и вся проводимая энергия остается в системе, приводя к неограниченному росту амплитуды её колебаний.

График $\varphi_0(\omega)$ для двух значений *R*, построенный по (29), приведен на рис. 11. При $\omega < \omega_0$ $\varphi_0 < 0$ и напряжение на контуре отстает от тока (сопротивление цепи, как говорят, носит емкостный характер); при $\omega > \omega_0$ $\varphi_0 > 0$ и напряжение, наоборот, опережает ток (сопротивление имеет индуктивный характер). При $\omega = \omega_0$ $\varphi_0 = 0$, напряжение и ток – в фазе и контур представляет собой чисто активное сопротивление.

Замечание 1. Наблюдаемый в последовательной цепи резонанс называется резонансом *напряжений*, а не токов, хотя при $\omega = \omega_0$ резко возрастает именно ток. Объясняется это тем, что при совпадении частот напряжения U_L и U_C, колеблющиеся в противофазе, в сумме дают нуль в любой момент времени (см. рис. 9) и каждое из них может во много раз превысить внешнее напряжение.

Замечание 2. Как уже отмечалось, при резонансе амплитуда тока $I_0 \to \infty$, если $R \to 0$. Однако на первый взгляд неясно, почему такая ситуация нарушается при сколь угодно малом затухании. Ведь, казалось бы, если затухание очень мало и потери за период меньше энергии, поступающей извне, амплитуда должна также неограниченно возрастать. Чтобы понять, почему этого не происходит, достаточно сравнить выражения для теряемой мощности $P_{дж} = I^2 R$ и мощности $P_{эл} = UI\cos\varphi = UI$, развиваемой внешними электрическими силами. Первая – квадратична по току, вторая – линейна. Очевидно, что, каким бы малым ни было сопротивление *R*, кривые $P_{дж}(I)$ и $P_{эл}(I)$ обязательно пересекутся (рис.12). Точка их пересечения и определит установившуюся амплитуду колебаний тока в контуре.

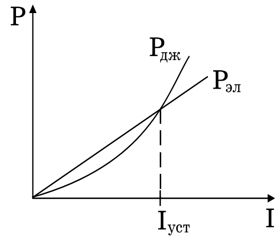


Рис. 12

§12.9. Решение уравнения вынужденных колебаний

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, могут быть без труда перенесены на случай механической колебательной системы. Надо только учесть, что ток в контуре эквивалентен *скорости* v груза в системе рис. 1, и, стало быть, все сказанное о токе напрямую относится к скорости. Поскольку, далее, исходные уравнения (4) и (2) написаны, соответственно, для заряда и смещения, найденные зависимости $I(t)$ и $v(t)$ *не являются* решениями этих уравнений.

Однако, зная зависимость производной гармонической функции от времени, легко, конечно, найти и саму функцию. Для заряда, в частности, если

$$\dot{q}(t)=I(t)=\frac{U_0}{Z}\cos(\omega t-\varphi_0),$$

где Z и φ_0 определяются формулами (31) и (29), то, очевидно,

$$q(t)=\frac{U_0}{\omega Z}\sin(\omega t-\varphi_0)\ ^{22}. \tag{34}$$

Делая в выражениях (34), (31) и (29) замену электрических параметров на механические (см.(31л19), (32л19) и (39л19)), преобразующую уравнение (4) в уравнение (2), для решения последнего получим

$$x(t)=A\sin(\omega t-\varphi_0), \tag{35}$$

где

$$A=\frac{F_0}{\omega\sqrt{h^2+(\omega m-\frac{k}{\omega})^2}}, \tag{36}$$

$$tg\,\varphi_0=\frac{\omega m-\frac{k}{\omega}}{h}\ ^{23}. \tag{37}$$

Ход кривой $A(\omega)$ (рис.13), построенной по (36), несколько отличается от поведения зависимости $I_0(\omega)$, представленной на рис. 10. Во-первых, при $\omega\to 0$ $A\to\frac{F_0}{k}$ и остается конечной. Инертные свойства системы оказываются несущественными, и смещение в любой момент времени представляет собой статическую деформацию пружины. Во-вторых, резонансное значение A_{max} амплитуды колебаний достигается на частоте $\omega_{рез}$, несколько меньшей собственной. Это связано с присутствием множителя ω в знаменателе (36). В небольшой окрестности ω_0 выражение под радикалом остается почти постоянным, и уменьшение ω приводит к некоторому возрастанию амплитуды. Исследуя (36) на экстремум, нетрудно найти $\omega_{рез}$ и A_{max}. Однако при малом затухании $(\delta\ll\omega_0)$ частоты $\omega_{рез}$ и ω_0 оказываются близкими, а резонансная амплитуда

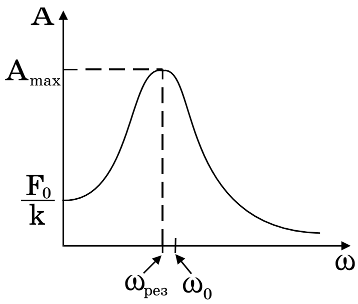


Рис. 13

$$A_{max}\cong A(\omega_0)=\frac{F_0}{h\omega_0}. \tag{38}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Получить уравнение вынужденных колебаний для простейших механической и электрической колебательных систем.
3. Что называется векторной диаграммой?
4. Доказать, что сумма двух гармонических колебаний одной частоты есть тоже гармоническое колебание той же частоты. Найти его амплитуду и начальную фазу.
5. Что называется током, текущим через конденсатор, включенный в цепь переменного тока?
6. Найти токи (как функции времени), текущие через R, L и C при подключении каждого из этих элементов к источнику напряжения $U(t)=U_0\cos\omega t$. Построить векторные диаграммы токов и напряжений (для всех трех случаев), соответствующие двум моментам времени: $t_1 = 0$ и $t_2 = T/4$.
7. Что называется сопротивлением цепи переменному току? Чему равны сопротивления резистора, индуктивности и емкости? Что такое реактивное сопротивление?
8. Что называется мощностью в цепи переменного тока? Какими силами она развивается? Получить выраже-

[22] Постоянную интегрирования здесь мы сразу полагаем равной нулю, ибо она соответствует постоянному заряду конденсатора, т. е. постоянному напряжению, отсутствующему в правой части уравнения (4).

[23] Отметим еще раз, что полученное решение является частным (не охватывающим всех возможных решений исходного уравнения) и соответствует *установившимся* вынужденным колебаниям. Общее решение уравнения (2) или (4) содержит в качестве слагаемого еще затухающее колебание (40л19), могущее представлять интерес лишь в течение времени установления колебаний.

ние для этой мощности.

9. Что такое действующее значение переменного тока или напряжения? Чему оно равно для гармонического сигнала?

10. Построить векторные диаграммы тока и напряжений для последовательной LCR-цепи. Получить выражения для её полного сопротивления и сдвига фаз φ между током и напряжением. Ток отстает от напряжения или опережает его?

11. Привести аналитическую зависимость $I_0(\omega)$ для последовательной LCR-цепи. Изобразить её графически для двух значений R.

12. Построить график фазового сдвига $\varphi(\omega)$ для той же цепи и тоже для двух значений R.

13. Что называется резонансом? Почему резонанс в последовательной цепи называется резонансом напряжений?

14. Почему при сколь угодно малом затухании амплитуда вынужденных колебаний при резонансе не стремится к бесконечности?

15. Привести решение уравнения вынужденных колебаний. Изобразить графически зависимость $A(\omega)$.Сравнить её с зависимостью $I_0(\omega)$.

Лекция 21

Глава 13. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. ВОЛНЫ

§13.1. Нормальные колебания

Помимо рассмотренных нами свободных и вынужденных колебаний систем (с одной степенью свободы) различают еще два типа колебаний – параметрические и автоколебания. В первом случае под внешним воздействием периодически меняется какой-либо параметр системы (например емкость контура), что при определенных условиях обеспечивает приток в нее энергии извне и, таким образом, поддерживает колебания. Во втором – источник, покрывающий утечку энергии при движении системы, составляет обычно её неотъемлемую часть и автоматически «включается» в нужные моменты времени происходящими в системе колебаниями (например анкерный механизм в часах, дважды за период подталкивающий их маятник).

Мы, однако, ограничимся лишь упоминанием об этих типах колебаний и перейдем к рассмотрению (да и то краткому) систем со многими степенями свободы, интересуясь при этом только их собственными колебаниями. Начнем с систем, имеющих две степени свободы. Несколько их разновидностей изображены на рис. 1.

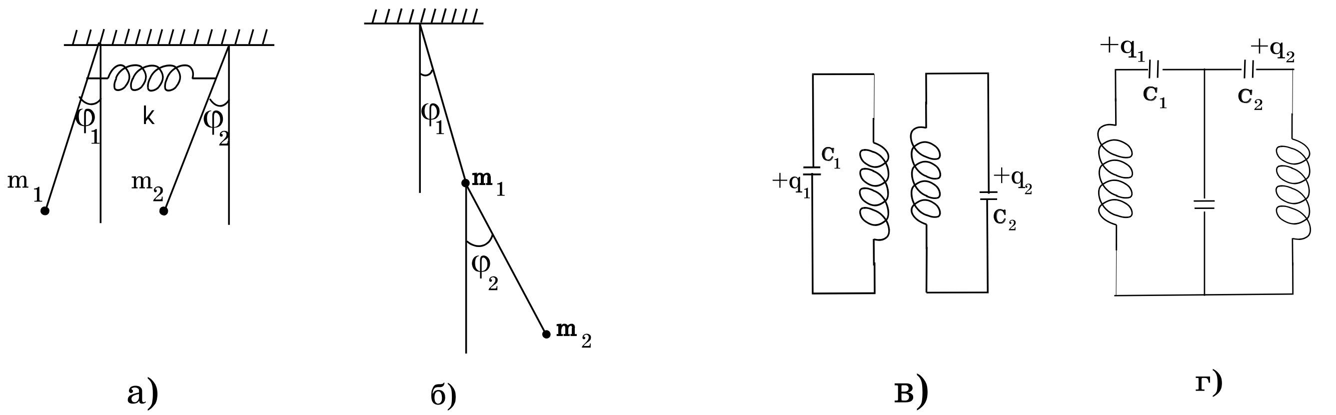


Рис. 1

Системы а) и б) – материальные точки на жестких невесомых стержнях. Координатами здесь служат углы φ_1 и φ_2 отклонения маятников от вертикали. Системы в) и г) – индуктивно и емкостно связанные контуры. В них координатами являются заряды q_1 и q_2 на выбранных обкладках конденсаторов. Во всех случаях между подсистемами, образующими систему, имеется связь и колебания в одной из них зависят от колебаний в другой. Связь эта может быть выявлена, если написать уравнения движения маятников рис. 1 а) и б) или уравнения колебаний заряда в цепях рис. 1 в) и г) с учетом влияния одного контура на другой. При этом уравнения движения подсистем «зацепляются» и приходится анализировать уже *систему* дифференциальных уравнений. Подобный анализ требует значительной математической подготовки, и мы приведем лишь его результат.

Любая колебательная система с двумя степенями свободы, характеризуемыми координатами x_1 и x_2, имеет две собственные частоты ω_1 и ω_2, которые определяются только свойствами системы и *не зависят* от способа её возбуждения. В общем случае координаты x_1 и x_2 меняются по закону

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \\ x_2(t) &= k_1A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+k_2A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \end{aligned} \qquad (1)$$

где амплитуды A_1 и A_2 и начальные фазы φ_1 и φ_2 задаются начальными условиями, а константы k_1 и k_2 (могущие быть и отрицательными) – устройством системы. Величина k_1 называется *коэффициентом распределения амплитуд* частоты ω_1 по координатам, k_2 означает то же для частоты ω_2.Таким образом, при произвольных начальных условиях в колебаниях каждой координаты присутствуют *две* (собственные) частоты, которым соответствуют различные амплитуды и фазы, зависящие от начальных условий. В то же время колебания какой-либо частоты, присутствующие в обеих координатах, всегда происходит с *одной и той же* начальной фазой[24], хотя и с разными амплитудами. Однако и амплитуды не совсем произвольны: они связаны коэффициентами распределения k_1 и k_2. Таким образом, как бы мы ни возбуждали систему, движения её координат «подобны»: и там, и там присутствуют гармонические колебания с одинаковыми частотами и начальными фазами, причем амплитуды, соответствующие этим частотам, пропорцио-

[24] Если $k < 0$, то правильнее сказать, что колебания происходят в противофазе. Однако иногда ради компактности и удобства изложения мы будем считать амплитуды *алгебраическими* величинами.

нальны друг другу.

А можно ли возбудить систему так, чтобы, например, амплитуда A_2 обратилась в нуль? Да, можно. При этом обе координаты системы будут колебаться с одной и той же частотой ω_1, т. е. двигаться по гармоническому закону. Такое движение называется *нормальным колебанием*, а соответствующая ему частота, как мы уже знаем, – собственной. Подбирая другие начальные условия, можно добиться того, чтобы $A_1 = 0$, и, таким образом, реализовать второе нормальное колебание с другой (собственной) частотой ω_2. В общем случае как способы возбуждения системы для наблюдения нормальных колебаний, так и значения её собственных частот находятся из решения соответствующей системы дифференциальных уравнений (движения). Однако в ряде ситуаций, особенно для «симметричных» систем, они могут быть получены непосредственно из физических соображений. Например, для системы, изображенной на рис. 2, первое нормальное колебание (синфазное), очевидно, соответствует одинаковому начальному отклонению обоих маятников в одну сторону (рис. 2а). Пружина при этом деформироваться не будет и первая собственная частота просто равна частоте колебаний одного отдельно взятого маятника.

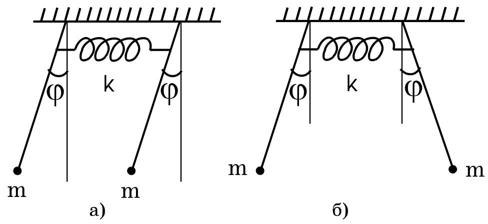


Рис. 2

Второе нормальное колебание возбуждается при равном противофазном начальном отклонении маятников (рис. 2б). В этом случае средняя точка пружины остается неподвижной и каждая масса будет, очевидно, при малых углах совершать гармонические колебания уже более высокой частоты. При любых других начальных отклонениях (с нулевыми скоростями) в колебаниях каждого маятника в соответствии с (1) будут присутствовать обе частоты. Нельзя возбудить у одного из них только частоту ω_1, а у другого при этом – только ω_2.

Основные черты собственных колебаний системы с двумя степенями свободы присущи и системам со многими (n) степенями свободы. Такая система имеет n собственных частот[25], и в общем случае все они присутствуют в колебаниях каждой её координаты. Определенным подбором начальных условий можно и здесь добиться такого движения системы, при котором все её координаты колеблются по гармоническому закону с *одной и той же* (собственной) частотой. Это движение называется нормальным колебанием, причем их у системы всего n (столько же, сколько собственных частот). Колебания системы описываются выражениями, аналогичными (1), однако мы не будем их выписывать, а ограничимся лишь уже отмеченными самыми общими свойствами этих колебаний.

А как будет колебаться система с бесконечным числом степеней свободы (например, натянутая струна)? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала распространение колебаний в неограниченном пространстве, т. е. волновой процесс.

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Если заставить какую-либо точку среды совершать колебание, то благодаря наличию связей этой точки с остальными, они тоже придут в движение. Каким оно будет? Чтобы найти его, нужно выделить какой-либо элемент среды, сместить его из положения равновесия (невозмущенного положения) и написать для него II закон Ньютона, предварительно сделав определенные разумные предположения о характере его связей с другими элементами. Такое рассмотрение (ввиду его громоздкости мы не будем его приводить, хотя оно вполне нам по силам) приводит к так называемому волновому уравнению – дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных. Из него следует, что движение выделенной точки (источника) будет повторяться другими точками среды, причем с некоторым запаздыванием, пропорциональным их расстоянию до источника. В среде, как говорят, возникнет волна.

Итак, расчеты показывают, а опыт подтверждает, что возмущение, сообщенное какой-либо точке среды, «побежит» по ней с постоянной скоростью[26]. *Возмущение, распространяющееся в пространстве с течением времени, мы будем называть волной* (в широком смысле).

§13.2. Классификация волн

В зависимости от свойств и характера движения излучателя, а также параметров среды можно по-разному классифицировать возникающие в ней волны (например, синусоидальные – несинусоидальные, затухающие – незатухающие и т. п.). Мы остановимся на двух наиболее общих критериях, позволяющих произвести такую классификацию.

1. По направлению движения частиц можно выделить два основных типа:

а) поперечные волны, когда движение частиц среды происходит поперек волны, т. е. перпендикулярно скорости её распространения (например, волна в струне);

б) продольные волны, в которых частицы перемещаются вдоль волны, т. е. параллельно направлению её движения (волна в столбе газа в трубе).

Понятно, что поперечные волны могут существовать только в твердых телах, «сопротивляющихся» на сдвиг, в то время как для продольных волн таких ограничений нет: они возбуждаются в любых средах.

Отмеченные два типа не охватывают всех возможных разновидностей волн. Хорошо известны и весьма распространены поверхностные волны. Оказывается, что такие волны не являются ни продольными, ни поперечными: частицы в них совершают более сложные движения, перемещаясь приблизительно по окружностям. Существуют, например, волны вздутия, возникающие в твердом стержне при ударе по его торцу, и т. п.

2. По форме волновой поверхности (т. е. поверхности, все точки которой совершают одинаковые движения) мы будем различать три основных вида:

а) плоские волны (излучаемые бесконечной плоскостью);

[25] Возможны вырожденные случаи, когда некоторые из этих частот совпадают.

[26] Речь идет, конечно, об однородных и изотропных средах; в противном случае скорость окажется зависящей от направления и непостоянной.

б) цилиндрические (возбуждаемые бесконечной нитью меняющегося диаметра);
в) сферические (создаваемые пульсирующей сферой).

Первые два вида являются идеализацией и могут существовать лишь в непосредственной близости от источника, на расстояниях, много меньших его «бесконечного» размера. Аналогом двух последних в случае поверхностных волн являются круговые волны.

§13.3. Волновая функция

Ограничиваясь рассмотрением только продольных и поперечных волн, отклонение частицы от положения равновесия можно описать лишь одной координатой y, которую будем отсчитывать вдоль направления распространения для продольной волны и перпендикулярно ему для волны поперечной. Если x – координата *невозмущенного* положения частицы, то, очевидно, y будет функцией двух переменных x и t: это – смещение частицы из положения равновесия x в момент времени t. Тогда выражение для неискажающейся волны, бегущей вдоль положительного направления оси x, будет иметь вид

$$y(x,t) = f(t - \frac{x}{c}), \tag{2}$$

где f – произвольная непрерывная функция, а $c > 0$ – некая константа. Волновой характер движения здесь заключен в комбинации аргументов $t - \frac{x}{c}$. Действительно, если f – неискажающаяся волна, то она должна перемещаться вдоль x с некоторой скоростью. Это значит, что, двигаясь с этой же скоростью вместе с волной, мы будем все время видеть перед собой постоянное значение функции f. Но из произвольности f следует постоянство её аргумента. Стало быть, если, перемещаясь, мы видим

$$t - \frac{x}{c} = const, \tag{3}$$

то мы движемся со скоростью волны. Дифференцируя (3) по времени, получим

$$1 - \frac{\dot{x}}{c} = 0, \tag{4}$$

откуда

$$\dot{x} = c, \tag{5}$$

т. е. константа c есть не что иное, как скорость распространения волны. Следует иметь в виду, что эта скорость не имеет ничего общего со скоростями частиц среды. Каждая частица отклоняется от положения равновесия, останавливается и обычно снова возвращается в него, в то время как волна, т. е. некая *форма*, бежит со скоростью c, переходя от одной частицы к другой.

Наибольший интерес представляют синусоидальные (косинусоидальные) волны, для которых функция f – синус или косинус. Такая волна имеет вид

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \varphi_0] = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0), \tag{6}$$

где A, ω и φ_0 – соответственно амплитуда, частота и начальная фаза волны, а постоянная

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{7}$$

называется волновым числом.

Наименьшее расстояние между двумя точками, колеблющимися в фазе (т. е. синфазно), называется длиной волны λ. Очевидно, набег фазы между этими точками должен составлять 2π в любой момент времени. Это значит, что расстояние межу ними, т. е. λ, удовлетворяет соотношению

$$k\lambda = 2\pi, \tag{8}$$

откуда

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{9}$$

Коэффициент k при x играет в аргументе косинуса такую же роль, что и ω при t: это – некая «пространственная» частота. Обратная ей величина, умноженная на 2π, представляет собой «пространственный» период, т. е. в соответствии с (9) длину волны. Сравнивая (7) с (9), можно получить связь между длиной волны λ, частотой ω (или периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$) и скоростью её распространения c:

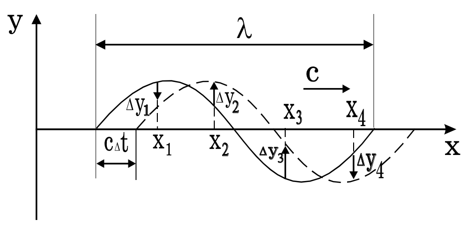


Рис. 3

$$\lambda = cT, \tag{10}$$

т. е. за время, равное периоду T, волна, двигаясь со скоростью c, проходит путь λ.

Если зафиксировать время, т. е. сделать как бы мгновенную фотографию волны, то мы увидим синусоиду смещений частиц, растянутую по пространственной координате (см. рис. 3, где специально изображен только один период такой синусоиды). Для случая поперечной волны в струне – это просто её профиль в какой-то момент времени. Изгиб бежит вправо со скоростью c. Через время Δt профиль струны будет изображаться пунктирной кривой. За это время её частицы сместятся в *поперечном* направлении на некоторые (разные) расстояния, в зависимости от фазы их колебаний. Для четырех частиц с координатами x_1, x_2, x_3 и x_4 их смещения Δy_i изображены на рис. 3.

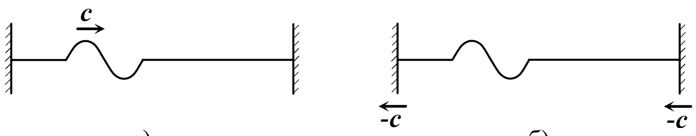
Зная закон колебания каждой точки x, можно найти зависимость от времени её скорости. Для этого нужно продифференцировать (6) по t (считая x постоянной, т. е. относя дифференцирование к какой-то определенной частице, положение равновесия которой имеет координату x). В итоге получим волну скорости

$$\dot{y}(x,t) = -A\omega\sin(\omega t - kx + \varphi_0), \tag{11}$$

распространяющуюся вдоль x с той же скоростью c.

§13.4. Скорость распространения волн

Скорость волны получается (как и само её существование) из дифференциального уравнения движения частиц среды. Она определяется свойствами среды, причем свойства эти могут быт весьма разнообразными. В частности, они могут быть таковыми, что скорость оказывается зависящей, помимо характеристик среды, от частоты волны (т. е. частоты движения излучателя). *Зависимость скорости распространения волны от её частоты называется дисперсией*, а среды, в которых наблюдается такая зависимость, – *диспергирующими.* Однако упругие волны, рассмотрением которых мы ограничимся, дисперсией не обладают.



а) б)

Рис. 4

Иногда величину скорости $\boldsymbol{c}$ удается получить, не прибегая к волновому уравнению, а используя какие-нибудь вспомогательные соображения. Рассмотрим, например, поперечную волну в натянутой струне (рис. 4 а), бегущую вправо со скоростью $\boldsymbol{c}$. Перейдем в новую инерциальную систему координат, движущуюся вместе с волной со скоростью $\boldsymbol{c}$. В этой системе волна окажется неподвижной, а вся струна – бегущей мимо нас влево со скоростью $-\boldsymbol{c}$ (рис. 4 б). Если мысленно заключить вершину какого-либо «горбика» в небольшую изогнутую трубочку так, чтобы струна не касалась её стенок, то частицы струны будут «протягиваться» сквозь эту трубочку под действием только сил её натяжения. При этом каждый участок, находящийся в трубочке, будет двигаться приблизительно по дуге окружности некоторого радиуса R (рис. 5) со скоростью c. В случае малых отклонений при изгибе струны её удлинением вполне допустимо пренебречь и считать натяжение T постоянным вдоль всей струны. Тогда для малого её участка массы Δm можно написать

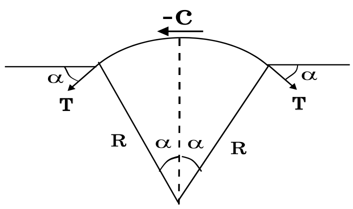


Рис. 5

$$\frac{\Delta m c^2}{R} = 2T\sin\alpha . \tag{12}$$

Выбирая угол α настолько малым, что $\sin\alpha \approx \alpha,$ получим

$$\frac{\xi 2\alpha R c^2}{R} = 2T\alpha, \tag{13}$$

где $\xi = \dfrac{\Delta m}{\Delta l}$ – погонная плотность (т. е. масса единицы длины) струны. Отсюда

$$c = \sqrt{\frac{T}{\xi}}. \tag{14}$$

Приведем без вывода еще выражения для скоростей продольных волн в твердом теле $c_{тв}$ и столбе газа $c_г$:

$$c_{тв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{15}$$

$$c_г = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{kT_k}{m_0}} . \tag{16}$$

Здесь E – модуль Юнга, ρ – объемная плотность, $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты, p – давление в газе, k – постоянная Больцмана, T_k – абсолютная температура, m_0 – масса молекулы. Во всех случаях скорость растет с увеличением связи между частицами среды (т. е. T, E и p) и уменьшением её плотности. Ни в одну из формул (14) – (16) частота не вошла, т. е. рассмотренные типы волн дисперсией действительно не обладают.

А вот поверхностные волны (не упругие), которые делятся на капиллярные и волны тяжести, имеют дисперсию, причем она оказывается различной у обеих этих разновидностей. Однако это более сложные случаи, выходящие за рамки нашего рассмотрения.

§13.5. Энергия волны

Совершенно очевидно, что колеблющиеся частицы среды, по которой распространяется волна, обладают определенной энергией. Поскольку частицы эти в среднем (по времени) перемещений не совершают, а колеблются около положений равновесия, возникает вопрос, движется ли запасенная ими энергия (например, вместе с волной или как-нибудь еще) или же остается в целом неподвижной и любая порция её оказывается «привязанной» к соответствующей частице среды?

Для ответа на этот вопрос нужно выделить какой-либо элемент среды массой dm и проследить, как меняются его кинетическая и потенциальная энергии в процессе его колебаний. Очевидно, кинетическая энергия dW, пропорциональная квадрату скорости $\dot{y}$ элемента, с учетом (11) будет меняться по закону

$$dW(x,t)=\frac{dm\dot{y}^2(x,t)}{2}=\frac{\rho S dx}{2}A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi_0) \qquad (17)$$

(ρ – плотность среды, S – площадь перпендикулярного скорости сечения, а dx – длина рассматриваемого элемента среды), т. е. представляет собой тоже волну. Фиксированное (всегда положительное!) значение dW «бежит» вдоль x со скоростью c, *переходя с одних частиц на другие*. Рассматривая возникающие деформации выделенного элемента, можно показать (ввиду громоздкости мы опускаем эти выкладки), что его потенциальная энергия dU в упругой волне тоже распространяется вдоль x, причем в точном соответствии с формулой (17). Таким образом, dW и dU меняются синхронно с течением времени в любой точке пространства и полная энергия $dE=dW+dU$ перетекает от точки к точке в виде волны со скоростью c.

Выберем какое-либо сечение x_0 и найдем энергию, протекшую через это сечение в единицу времени. Очевидно, за время dt это сечение пересечет отрезок волны длиной $dx=cdt$, на долю которого приходится энергия

$$dE(x_0,t)=\rho ScdtA^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx_0+\varphi_0),$$

а за единицу времени через выбранное сечение перетечет энергия

$$\frac{dE(x_0,t)}{dt}=\rho cSA^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx_0+\varphi_0). \qquad (18)$$

Среднее значение этой величины за период определяется средним значением $\sin^2(\omega t-kx_0+\varphi_0)$, которое, как известно, при любых x_0 и φ_0 равно $\frac{1}{2}$. Стало быть, средняя энергия, пересекающая x_0 в единицу времени

$$\frac{dE_{ср}}{dt}=\frac{1}{2}\rho cSA^2\omega^2 \sim A^2\omega^2 Sc. \qquad (19)$$

Физически течение энергии можно понять, если рассмотреть, например, какое-либо сечение x_0 струны, несущей волну (рис. 6). За время Δt точка M переместится на Δy, и сила натяжения $\boldsymbol{T}$, действующая со стороны левой части струны на правую, совершит положительную работу. Легко проверить, что это останется справедливым для любой фазы колебаний точки M. Таким образом, каждый участок струны непрерывно совершает работу над находящимся правее и, стало быть, слева направо должна течь энергия.

Рис. 6

Из соотношения (19) следует, что в среде без затухания амплитуда остается постоянной только у плоской волны. У сферической и цилиндрической она должна уменьшаться при удалении от источника. Действительно, чем дальше волна уходит от источника, тем больше материальных точек вовлекается в волновой процесс. Энергия волны распределяется между ними, и её амплитуда падает. Поскольку энергия, переносимая волной через любую окружающую источник замкнутую поверхность должна оставаться постоянной (ибо она нигде не накапливается и не теряется), то, выбирая в качестве такой поверхности концентрическую сферу или коаксиальную круговую цилиндрическую поверхность, можно в соответствии с (19) написать

$$A^2S=const, \qquad (20)$$

где S – площадь сферы или боковой поверхности цилиндра. Отсюда получаем закон убывания амплитуд соответственно сферической и цилиндрической волн:

$$A_{сф}\sim\frac{1}{r}, \qquad (21)$$

$$A_{цил}\sim\frac{1}{\sqrt{r}}, \qquad (22)$$

где r – (радиальное) расстояние до источника. Поскольку и плоские, и цилиндрические виды волн являются идеализацией, на больших расстояниях от источника волна всегда близка к сферической (распространяющейся в некотором телесном угле), для которой скорость (21) спадания амплитуды с радиусом максимальна. Однако даже такое уменьшение амплитуды является существенно более медленным, чем спадание с расстоянием статических полей (например, электростатического или гравитационного), меняющихся, как известно, обратно пропорционально *квадрату* радиуса.

§13.6. Стоячие волны

При малых амплитудах (а только такие мы и рассматриваем), когда возникающие деформации среды подчиняются закону Гука, для волн оказывается справедливым принцип суперпозиции: волны накладываются друг на друга, не искажаясь. При этом смещение любой точки среды равно векторной сумме смещений, вызванных каждой отдельно взятой волной. Такой вывод следует из анализа волнового уравнения и целиком подтверждается экспериментом.

Рассмотрим две плоские волны с одинаковыми амплитудами и частотами, бегущие навстречу друг другу. Их наложение вызывает картину, называемую *стоячей волной*. Смещение точек в стоячей волне можно получить, сложив волновые функции для прямой и обратной волн (начальные фазы полагаем равными нулю):

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx) = 2A\cos kx\cos\omega t = A'(x)\cos\omega t. \tag{23}$$

В (23) переменные разделились, т. е. из суммы функций двух переменных получилось произведение двух функций, в каждой из которых по одной переменной. В стоячей волне (23) частицы колеблются существенно иначе по сравнению с бегущей. Все точки, возмущенные ей, движутся синхронно по закону $\cos\omega t$. Однако амплитуды колебаний $A'(x)$ частиц зависят от их положений:

$$A'(x) = 2A\cos kx. \tag{24}$$

В точках, где $\cos kx = 0$, т. е. $kx = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$, или для которых

$$x = \pm\frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3}{4}\lambda, \pm\frac{5}{4}\lambda, \ldots, \tag{25}$$

$A' = 0$, т. е. эти точки всегда остаются неподвижными (рис. 7). Они называются *узлами*. Существуют, наоборот, точки, для которых амплитуда колебаний максимальна и равна $2A$. Эти точки называются *пучностями*. Очевидно, что им соответствуют координаты

$$x = 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots. \tag{26}$$

Таким образом, в пределах полуволны, от узла до узла, все точки колеблются в фазе, но с разными амплитудами. Между соседней парой узлов фаза колебаний меняется на противоположную ($A'(x)$ меняет знак), затем, если идти вдоль x, снова сдвигается на π и т.д. На рис. 7 сплошной кривой изображена функция $A'(x)$. Очевидно, она соответствует отклонениям частиц в моменты времени $t = 0, T, 2T, \ldots$, когда $\cos\omega t$ в (23) равен единице. Через полпериода $\cos\omega t$ сменит знак, и кривая $A'(x)$ перейдет в зависимость $-A'(x)$: все частицы максимально отклонятся в противоположные стороны и т. д. Пунктиром изображена кривая смещений частиц в момент t, немного превышающий четверть периода. В моменты $t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \ldots$ $\cos\omega t = 0$ и функция $y(x) \equiv 0$, т. е. все точки проходят через положения равновесия.

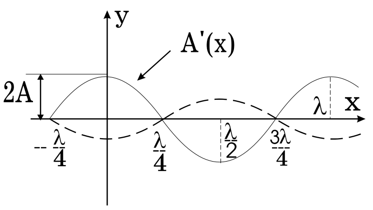


Рис. 7

Наличие узлов, т. е. неподвижных точек, в стоячей волне делает невозможным течение вдоль нее энергии. Рассматривая в качестве примера колебания частичек струны с возбужденной в ней стоячей волной, нетрудно убедиться (предоставляем это сделать читателю), что энергия все же перемещается, однако только в пределах полуволны между узлами. Дважды за период она группируется ближе к пучности и дважды расходится к узлам. Однако колебания участков струны между узлами остаются независимыми друг от друга; можно выбрать два любых узла, закрепить их и удалить все, что находится за их пределами: кусок струны между узлами этого «не почувствует», он будет колебаться сам по себе.

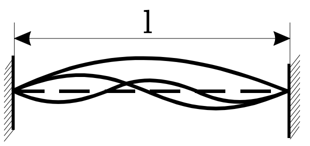


Рис. 8

Таким образом, если взять отрезок струны с закрепленными концами, то в нем могут существовать стоячие волны определенных длин, таких, чтобы на всем отрезке укладывалось целое число полуволн (рис. 8):

$$l = \frac{\lambda}{2}, \frac{2}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \ldots = n\frac{\lambda}{2}, \tag{27}$$

где n = 1, 2, 3, ..., а l – длина струны. Отсюда определяются частоты колебаний, могущих образовывать в рассматриваемой системе стоячие волны:

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2l}n. \tag{28}$$

Из сказанного явствует, что стоячие волны в струне представляют собой не что иное, как её нормальные колебания, а частоты ν_n – её собственные частоты. Действительно, все точки системы движутся при этом по гармоническому закону (23) с одной и той же частотой ν_n в фазе или противофазе друг с другом, причем соотношение между их амплитудами, даваемое выражением (24), оказывается вполне определенным и не зависящим от условий возбуждения. По принципу суперпозиции стоячие волны, длины которых удовлетворяют отношению (27), могут существовать в струне одновременно (а не удовлетворяющие ему, очевидно, не могут возбуждаться вообще, ибо не дают нуль смещения на концах струны в любой момент времени), так что сумма колебаний с частотами (28) описывают движение системы в общем случае. Наименьшая из собственных частот и соответствующее ей колебание называются основными, остальные – высшими.

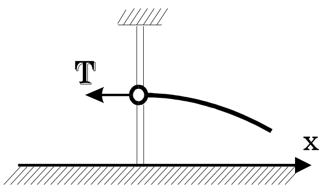


Рис. 9

Собственные частоты системы и распределение в ней амплитуд определяются её свойствами, в том числе и условиями на концах. Если конец струны закрепить не жестко, а позволить ему, например, скользить без трения вдоль перпендикулярного жесткого стержня, обеспечивающего натяжение струны (рис. 9), то на этом конце (который мы условимся называть свободным) будет не узел, а пучность смещения. Действительно, стержень будет действовать на скользящий по нему конец струны все время горизонтально. Но именно в пучности (и только там) сила натяжения струны при её колебаниях остается все время горизонтальной. Значит, если разрезать колеблющуюся струну в пучности и одну половину отбросить, а конец другой «закрепить», как указано на рис. 9, то оставшаяся половина не «заметит» этого: со стороны стержня на нее в любой момент будет действовать такая же сила, как и со стороны отброшенной части.

Изменение условий на одном из концов струны скажется, конечно, и на её собственных частотах. Возможные типы стоячих волн в этом случае изображены на рис. 10. Их длины должны, очевидно, удовлетворять соотношению

$$l = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \ldots = (2n-1)\frac{\lambda}{4}, \qquad (29)$$

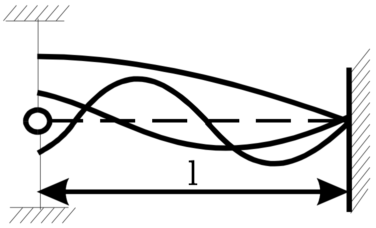


Рис. 10

где n = 1, 2, 3, …, а частоты

$$\nu_n = \frac{c}{4l}(2n-1). \qquad (30)$$

Основная частота уменьшилась здесь в два раза по сравнению с предыдущей ситуацией.

Можно реализовать и промежуточные варианты граничных условий, когда конец струны закреплен не жестко, но и не является свободным (например, «поджать» изображенный на рис. 9 шарик сверху и снизу надетыми на стержень пружинками). Нормальные колебания в этом случае будут иметь другой вид, а собственные частоты определяться более сложными формулами. Но попрежнему их будет бесконечно много (ведь отрезок струны имеет бесконечное число степеней свободы).

Описанные закономерности колебаний струны, ограниченной с двух сторон, носят, конечно, общий характер и могут быть без труда распространены на случай произвольной *одномерной* колебательной системы с распределенными параметрами (например, столба газа в трубе).

Контрольные вопросы и задания

1. Привести примеры механической и электрической колебательных систем с двумя степенями свободы.
2. Описать в общем случае движение колебательной системы с двумя степенями свободы. Что такое коэффициенты распределения амплитуд?
3. Что такое нормальное колебание? Сколько их у системы с n степенями свободы?
4. Какие существуют основные типы волн, различающиеся по направлению движения частиц и по форме волновой поверхности?
5. Написать волновые функции для неизменяющихся одномерных волн, бегущих в положительном и отрицательном направлениях оси x. Показать, что каждая из них движется с постоянной скоростью в нужном направлении.
6. Написать волновую функцию для гармонической волны, бегущей в положительном направлении оси x. Что такое длина волны, волновое число? Получить связь между длиной волны, её частотой и скоростью.
7. Вывести формулу для скорости волны в струне. Что такое дисперсия?
8. Написать формулы для скоростей звука в твердом теле и столбе газа.
9. Получить выражение для энергии волны.
10. Как меняются с расстоянием от источника амплитуды плоской, цилиндрической и сферической волн в среде без потерь? Почему?
11. Что такое стоячая волна? Получить описывающую её функцию.
12. Чем различаются движения точек среды при возбуждении в ней бегущей и стоячей волн?
13. Изобразить профили струны с возбужденной стоячей волной для двух моментов времени, разделенных интервалом в полпериода. Что такое пучность, узел стоячей волны?
14. Показать, что стоячие волны, например, в струне суть её нормальные колебания. Что такое основная частота? Как называются остальные частоты?
15. Получить формулы для собственных частот струны с закрепленными концами.
16. То же для струн со «свободными» концами и с одним закрепленным, а другим «свободным».

Лекция 22

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Рассматривая в предыдущей лекции механические волны, мы основное внимание уделили их свойствам, теоретически так и не показав саму возможность их существования, а сославшись на нее как на опытный факт. Правда, мы указали путь, каким это может быть сделано, путь, не вызывающий принципиальных трудностей и связанный лишь с некоторой громоздкостью вычислений.

Переходя к изучению электромагнитных волн, мы, напротив, именно этот вопрос, вопрос *существования* таких волн, будем считать центральным и представляющим бесспорно наибольший физический интерес и посвятим ему всю настоящую лекцию.

§13.7. Ток смещения

Процесс распространения электромагнитных возмущений в пространстве достаточно сложен и может быть удовлетворительно понят лишь с привлечением уравнений Максвелла. Понятно, что статические уравнения (10л17), являющиеся частным случаем полной электродинамической системы, для этих целей не подходят: они дают постоянные во времени поля, ничего общего с волновым процессом не имеющие.

Впрочем, мы получили уже одно динамическое уравнение, когда в лекции 18 вышли за рамки статики. Там был сформулирован закон индукции Фарадея (4л18), главное содержание которого состоит в обнаружении вихревого электрического поля, вызванного изменением магнитного. Этот эффект «подправил» статическое уравнение Максвелла (7л10), согласно которому циркуляция электрического вектора по любому замкнутому контуру равна нулю. Если этот контур пронизывает меняющееся магнитное поле, то циркуляция $\boldsymbol{E}$[27] уже нулю не равна, а определяется скоростью изменения магнитного потока Φ через него:

$$\oint_{\Gamma} E_l dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1}$$

где вместо суммы написан интеграл (так мы будем делать и далее), а кружок обозначает, что контур Г замкнут. Таким образом, для возбуждения электрического поля не обязательно иметь заряды; оно может быть создано и переменным магнитным полем.

Однако одного уравнения (1) еще недостаточно чтобы показать возможность существования электромагнитных волн; нужно изменить еще одно из статических уравнений – теорему о циркуляции. Ниже мы приведем соображения, позволяющие получить необходимую динамическую поправку к этой теореме.

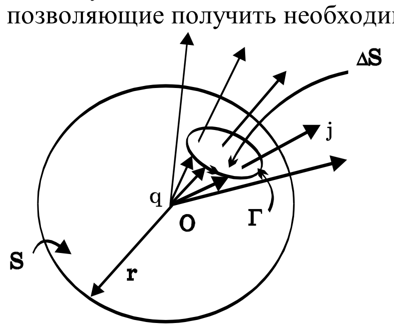


Рис.1

Рассмотрим сферически симметрично распределенный радиальный ток, вытекающий из какого-либо центра O (рис. 1). Например, в O можно поместить маленький радиоактивный шарик, испускающий равномерно по всем направлениям заряженные частицы. Окружим точку O сферой произвольного радиуса r и центром в O и выберем на ней какой-либо замкнутый контур Г, вырезающий на сфере участок поверхности площадью ΔS. Если j – плотность тока в точках сферы r, то, очевидно, выбранный контур будет пронизывать ток $I = j\Delta S$. Применяя к нему теорему о циркуляции (8л17), получим

$$\oint_{\Gamma} B_l dl = \mu_0 j \Delta S. \tag{2}$$

Но из соображений симметрии явствует, что касательная составляющая поля на поверхности сферы равна нулю[28] (ибо, если она отлична от нуля, то должна быть куда-то направлена, а у сферы такого выделенного направления нет). Налицо явное «нарушение» теоремы о циркуляции (поскольку соображения симметрии безупречны), и мы должны вскрыть причины этого нарушения.

При более внимательном анализе нашей схемы мы начинаем понимать, в чем здесь дело. Ведь теорема о циркуляции применима только к постоянным токам, которые должны удовлетворять условию стационарности (1л14). Это условие требует, чтобы распределение зарядов было стационарным, т. е. не менялось ни в одной точке области, занятой током. Чтобы удовлетворить ему в нашем случае, необходимо к шарику в центр сферы подвести проводок, по которому в точку O втекало бы столько же заряда, сколько из нее вытекает. Тогда заряд шарика будет оставаться все время постоянным и уравнение (2) окажется справедливым, но это сразу же нарушит сферическую симметрию системы. Желая сохранить симметрию, мы должны убрать проводок, но тогда заряд q тотчас же начнет убывать: этого требует закон сохранения заряда. Если полный ток, стекающий с шарика, равен I_0, то за время dt с него уйдет заряд $I_0 dt$; на эту величину, очевидно, и уменьшится его заряд q, т. е.

[27] Напомним, что под электрическим полем $\boldsymbol{E}$, как мы условились в лекции 18, понимается суперпозиция кулоновского и вихревого полей.

[28] Радиальная тоже равна нулю.

$$I_0 dt = -dq, \tag{3}$$

или

$$-\frac{dq}{dt} = I_0. \tag{4}$$

Итак, в нашем случае симметричной системы циркуляция $\boldsymbol{B}$ по контуру Г равна нулю, хотя его пронизывает некоторый ток. Ток этот вызван убылью заряда в центре сферы, т. е. порожден появлением *производных* электрических величин по времени. Отсюда следует, что наличие этих производных, по-видимому, влечет за собой возникновение каких-то новых эффектов, накладывающихся на уже известное из статики возбуждение магнитного поля токами и для нашей схемы полностью компенсирующих его. Это значит, что к правой части (2) должен быть добавлен некий член, зависящий от производных электрических величин по времени, обращающий её в нуль:

$$\oint_{\Gamma} B_l dl = \mu_0 j \Delta S + A = 0. \tag{5}$$

Выражая отсюда добавку A и используя (4), получим

$$A = -\mu_0 j \Delta S = -\mu_0 \frac{I_0}{S} \Delta S = \mu_0 \frac{dq}{dt} \frac{\Delta S}{S} = \mu_0 \frac{d}{dt}\left(q \frac{\Delta S}{S}\right). \tag{6}$$

Но заряд q, находящийся в данный момент внутри сферы r, определяет поле E на её поверхности и, таким образом, может быть выражен через это поле, например, с помощью теоремы Гаусса:

$$ES = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{7}$$

Считая, что основным «действующим лицом» во всех электромагнитных эффектах являются поля и интересуясь поэтому в первую очередь их взаимосвязью, выразим отсюда q и подставим в (6). Тогда

$$A = \mu_0 \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 E \Delta S\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dN}{dt}, \tag{8}$$

где $N = E\Delta S$ – поток вектора $\boldsymbol{E}$ через поверхность, ограниченную контуром Г.

С учетом поправки A уравнение (2) примет вид

$$\oint_{\Gamma} B_l dl = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dN}{dt} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{dN}{dt} \right), \tag{9}$$

где I – ток, пронизывающий контур Г. Максвелл, впервые написавший это уравнение, предположил, что в такой форме оно справедливо в самом общем случае произвольных токов и полей. Последующие эксперименты полностью подтвердили правильность этой гениальной догадки.

Согласно (9) магнитное поле может быть создано не только током I, но и меняющимся электрическим полем $\boldsymbol{E}$, причем величина

$$I_{см} = \varepsilon_0 \frac{dN}{dt} \tag{10}$$

входит в правую часть (9) наравне с током I, т. е. рождает $\boldsymbol{B}$ точно так же, как и этот ток. С точки зрения возбуждения поля она вполне ему эквивалентна, и поэтому Максвелл назвал её током смещения, хотя ни с каким движением заряженных частиц этот ток не связан[29]. Продолжая эту аналогию, величину

$$\boldsymbol{j}_{см} = \varepsilon_0 \frac{d\boldsymbol{E}}{dt} \tag{11}$$

следует назвать плотностью тока смещения, ибо поток этого вектора через произвольную поверхность S определяет полный ток $I_{см}$ через нее:

$$\int_S j_n dS = \int_S \varepsilon_0 \frac{dE_n}{dt} dS = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S E_n dS = I_{см} \tag{12}$$

(операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно, очевидно, менять местами). С учетом определения (10) выражение (9) может быть записано в наиболее компактной форме

$$\oint_{\Gamma} B_l dl = \mu_0 (I + I_{см}), \tag{13}$$

являющейся самым непосредственным обобщением теоремы о циркуляции на общий случай переменных полей.

Следует особо подчеркнуть, что хотя поправку A мы получили, рассматривая меняющееся *кулоновское* поле, выражение для тока смещения (10) и, следовательно, уравнение (9), или (13), сохраняют свою силу и в случае *вихревого* электрического поля, порожденного изменением магнитного[30]. Именно это их общее свойство и позволяет, как отмечалось в лекции (18), несмотря на существенные различия этих полей объединить их под общим названием – элек-

[29] Это название вряд ли можно считать особенно удачным, однако оно общепринято.
[30] Это ниоткуда не следует, а подтверждается только экспериментом.

трическое. Таким образом, между полями $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ наблюдается определенная симметрия и для магнитного поля оказывается справедливым закон, аналогичный закону электромагнитной индукции.

Отсюда сразу видна принципиальная возможность существования оторванных от зарядов и токов электрического и магнитного полей. Эти поля должны быть обязательно переменными, ибо появление одного из них обусловлено изменением во времени другого. Покажем, что такая возможность действительно реализуема.

§13.8. Поля, «оторвавшиеся» от источников

Рассмотрим простейшую (для теоретического анализа) одномерную «излучающую» систему – бесконечную по y- и z-направлениям проводящую плоскость (рис. 2), в которой в момент времени $t = 0$ внезапно включается равномерно распределенный по плоскости вертикальный ток линейной плотности

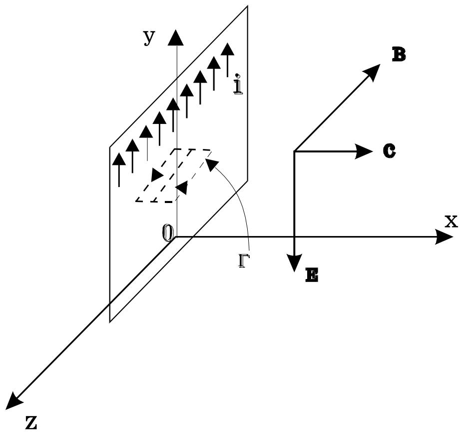


Рис. 2

$$i = \frac{\Delta I}{\Delta z}, \qquad (14)$$

где ΔI – ток, текущий по полосе ширины Δz. Совершенно понятно, что через некоторое время во всем пространстве[31] установится определенное статическое магнитное поле $\boldsymbol{B}$, которое нетрудно найти, используя соображения симметрии и теорему о циркуляции. Проводя соответствующие рассуждения для изображенного на рис. 2 контура Г (предоставляем это сделать читателю), легко получить, что

$$B_x = B_y = 0, \qquad (15)$$

$$|B_z| \equiv B = \frac{\mu_0 i}{2}, \qquad (16)$$

причем $B_z < 0$ при $x > 0$ и $B_z > 0$ при $x < 0$.

Но как будет *устанавливаться* это поле, что произойдет в течение времени этого установления? Может быть, оно *одновременно* во всех точках пространства начнет возрастать от нуля до своего стационарного значения (16)? Или же поле достигнет его в близких точках раньше, а в более далеких позже? Или процесс установления окажется каким-то иным?

Ответы на эти вопросы – в уравнениях Максвелла. Выпишем всю систему (для полей в вакууме):

$$(\mathrm{A})\begin{cases}\oint\limits_S E_n dS = \dfrac{q}{\varepsilon_0}, & (\mathrm{I})\\ \oint\limits_\Gamma E_l dl = -\dfrac{d\Phi}{dt}, & (\mathrm{II})\end{cases} \qquad (\mathrm{B})\begin{cases}\oint\limits_S B_n dS = 0, & (\mathrm{III})\\ \oint\limits_\Gamma B_l dl = \mu_0\left(I + \varepsilon_0\dfrac{dN}{dt}\right). & (\mathrm{IV})\end{cases} \qquad (17)$$

В статике она распадается на две независимые подсистемы (А) и (В), в общем же случае уравнения «зацепляются». Решить её даже для нашей одномерной задачи – дело трудное. Но решение можно угадать. Поэтому мы приведем его и проверим, удовлетворяет ли оно *всюду в любой момент времени* системе (17). Если да, то решение верно и единственно, если нет – надо пробовать другое[32].

Итак, приводим искомое решение: поле $\boldsymbol{B}$, даваемое выражениями (15) и (16), в момент включения тока $t = 0$ возникает в непосредственной близости у плоскости и далее перемещается в $\pm x$-направлениях с постоянной скоростью c. В тот же момент $t = 0$ вблизи плоскости появляется и электрическое однородное поле $\boldsymbol{E}$, направленное вдоль $-y$, которое тоже удаляется от плоскости со скоростью c. Фронты полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ совпадают. Таким образом, процесс установления нового стационарного состояния (соответствующего току i) носит волновой характер: возмущение (появление полей) распространяется в пространстве с некоторой скоростью $\boldsymbol{c}$ (рис. 3).

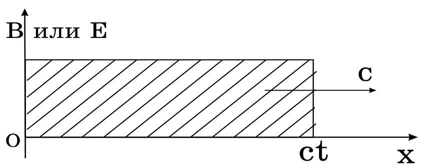


Рис. 3

Чтобы показать, что такое решение удовлетворяет уравнениям Максвелла, напишем сначала их для пустого пространства, где нет ни зарядов, ни токов:

$$(\mathrm{A}')\begin{cases}\oint\limits_S E_n dS = 0, & (\mathrm{I})\\ \oint\limits_\Gamma E_l dl = -\dfrac{d\Phi}{dt}, & (\mathrm{II})\end{cases} \qquad (\mathrm{B}')\begin{cases}\oint\limits_S B_n dS = 0, & (\mathrm{III})\\ \oint\limits_\Gamma B_l dl = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{dN}{dt}. & (\mathrm{IV})\end{cases} \qquad (18)$$

Первое и четвертое уравнения упростились, система стала симметричной. Теперь мы должны перебрать *всевозможные* замкнутые поверхности и контуры и проверить, выполняются ли для них, если они не пересекают плоскость, уравнения (18), а если пересекают – (17) в любой момент времени.

Прежде всего отметим, что уравнениям (I) и (III) системы (18) наши поля автоматически удовлетворяют. Действительно, эти уравнения означают, что линии векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ не имеют истоков, т. е. нигде ни начинаются, ни кончаются (ср. сказанное по этому поводу в лекциях 11 и 17). Но однородные поля как раз обладают таким свойством,

[31] Имеется в виду, как обычно, пространство, прилегающее к плоскости (ведь реальная плоскость всегда конечна).

[32] В полных курсах электродинамики показывается, что для системы (17) справедлива следующая теорема единственности: если распределения зарядов и токов заданы как функции координат и времени, то решение уравнений (17) существует и единственно (при выполнении еще некоторых дополнительных ограничений на поля, вытекающих из здравого смысла).

так что остается удовлетворить только уравнениям (II) и (IV).

Примем далее во внимание, что циркуляция вдоль контуров, *не пересекающих* фронта волны (и проводящей плоскости), т. е. целиком лежащих либо вне полей, либо в однородных стационарных $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, очевидно, равна нулю[33], стало быть для них (II) и (IV) тоже выполняются. И наконец, необходимо рассмотреть контуры, пересекающие либо фронт волны, либо проводящую плоскость (либо и то, и другое одновременно). Начнем с кривых первого типа.

Без ограничения общности, очевидно, достаточно провести рассмотрение для правого полупространства. Изобразим сначала «вид спереди» картины, представленной на рис. 2, в какой-то момент времени (т. е. посмотрим на нее со стороны оси z) (рис. 4). Слева от фронта волны – плоскости $x = ct$ – однородные $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, справа – полей нет. Выберем произвольный замкнутый контур, пересекающий фронт, и найдем циркуляцию по нему вектора $\boldsymbol{E}$ т. е. попытаемся удовлетворить уравнению (II-18). Повторяя рассуждения, приведенные в лекции 17 при выводе теоремы о циркуляции (§10.6), нетрудно показать, что циркуляция эта сводится к циркуляции по *плоской* кривой Γ', являющейся проекцией выбранного контура на плоскость xy, параллельную полю $\boldsymbol{E}$. Легко видеть также, что и поток вектора $\boldsymbol{B}$ через произвольный контур равен потоку через проекцию этого контура на ту же перпендикулярную $\boldsymbol{B}$ плоскость xy. Итак, обе части уравнения (II-18) не изменятся, если (для рассматриваемых однородных полей) перейти от любой замкнутой кривой к её проекции на плоскость xy.

Покажем теперь, что это уравнение допускает дальнейшее упрощение входящей в него теперь уже плоской петли Γ'. Пусть l – расстояние между точками M и N, в которых эта петля пересекает фронт волны в момент времени t[34]. Тогда прямоугольник Γ высоты l со сторонами, параллельными фронту (рис. 4), будет вполне эквивалентен кривой Γ'. В самом деле, оба контура разбиваются точками M и N на две половины, причем левые лежат *целиком*[35] в области однородных полей, а правые – вне поля вообще. Стало быть, циркуляция по замкнутому контуру, образованному левыми половинами кривых Γ и Γ' равна нулю и, значит, вклады этих половин в левую часть (II-18) (если идти в одном и том же направлении) одинаковы. Вклады же правых частей Γ и Γ' просто равны нулю. Нетрудно видеть, что и для правой части (II-18) петли Γ и Γ' эквивалентны: приращения потока Φ через них, вызванные перемещением фронта полей, оказываются одинаковыми (с точностью до бесконечно малых высших порядков) и равными

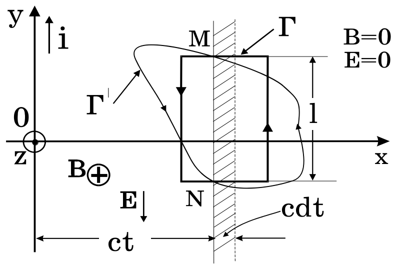


Рис. 4

$$d\Phi = -BdS = -Blcdt, \tag{19}$$

где dS – приращение площади контура, пронизываемой полем $\boldsymbol{B}$, за время dt, а знак «минус» соответствует выбранному и отмеченному на рис. 4 стрелками положительному направлению обхода контуров Γ и Γ' против часовой стрелки (тогда знак потока получается отрицательным, ведь поле $\boldsymbol{B}$ направлено от нас).

Таким образом, произвольный замкнутый контур мы свели к эквивалентному прямоугольнику Γ, для которого проверить справедливость уравнения (II-18) уже не представляет трудностей: очевидно,

$$\oint E_l dl = El, \tag{20}$$

и с учетом (19) оно примет вид

$$El = Blc\,, \tag{21}$$

откуда

$$E = Bc\,. \tag{22}$$

Значит, если плоская граница однородного поля $\boldsymbol{B}$ движется с пока произвольной скоростью c, то по закону электромагнитной индукции (II-18) рождается тоже однородное поле $\boldsymbol{E}$, величина которого определяется (22), причем закон этот выполняется для любого замкнутого контура.[36]

Займемся теперь уравнением (IV-18). Для этого посмотрим на происходящее сверху (со стороны оси y) (рис. 5). В точности повторяя все приведенные выше рассуждения, можно, очевидно, и циркуляцию $\boldsymbol{B}$ по любому контуру свести к циркуляции по прямоугольнику Γ, для которого уравнение (IV-18) примет вид

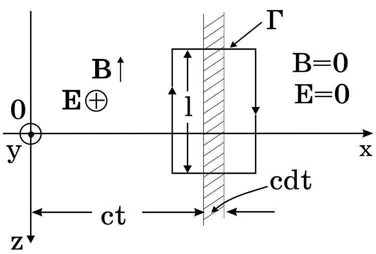


Рис. 5

$$Bl = \mu_0\varepsilon_0 E\frac{dS}{dt} = \mu_0\varepsilon_0 Ecl, \tag{23}$$

откуда

$$B = \mu_0\varepsilon_0 Ec. \tag{24}$$

Это соотношение дает величину поля $\boldsymbol{B}$, создаваемого током смещения, вызванным движением плоского фронта однородного поля $\boldsymbol{E}$ со скоростью c. Однако скорость эта уже не произвольна, ибо само поле $\boldsymbol{E}$ здесь взялось из закона индукции Фарадея. Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ должны удовлетворять сразу обоим рассмотренным уравнениям Максвелла, т. е. соотношениям (22) и (24) одновременно. Это значит, что устанавливается вполне *определенная* скорость распростране-

[33] Равенство нулю циркуляции однородного поля следует, хотя бы, из доказанной в лекции 10 потенциальности произвольного кулоновского поля, которое, в частности, может быть и однородным.

[34] Полученные ниже результаты легко обобщаются на случай нескольких пересечений контура Γ' с фронтом. Предоставляем это сделать читателю самостоятельно в качестве упражнения.

[35] Особые точки M и N, где поле испытывает скачок, не помешают рассуждениям, ибо прилегающие к ним участки кривой и плоскости могут быть выбраны сколь угодно малыми и потому не дающими заметного вклада ни в циркуляцию, ни в поток.

[36] Поскольку уравнения (II-17) и (II-18) совпадают, проверять их для контуров, пересекающих проводящую плоскость, нет смысла: она абсолютно ни на что не повлияет.

ния фронта, не зависящая от величин полей ***E*** и ***B***. Действительно, умножив (22) на (24), получим

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \; м/с, \tag{25}$$

что совпадает со скоростью света в вакууме.

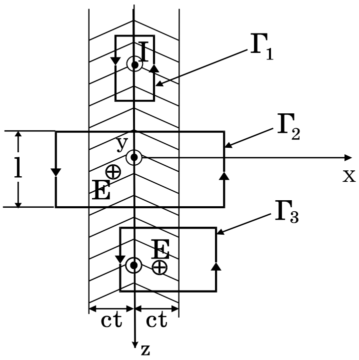


Рис. 6

Для полноты картины следует рассмотреть также контуры, пересекающие поверхностный ток, хотя уже и так понятно, что поля ***E*** и ***B*** могут распространяться в пространстве, поддерживая друг друга (система (18) в вакууме найденными полями удовлетворяется). Сводя аналогично вышеизложенному и здесь циркуляцию вдоль произвольного контура к циркуляции по прямоугольнику, можно выделить три их вида (рис. 6).

Используя Γ_1, мы уже получили выражение (16), удовлетворяющее уравнению (IV-17). Проверим, выполняется ли оно для Γ_2. Очевидно, левая его часть

$$\oint_{\Gamma_2} B_l dl = 0, \tag{26}$$

ибо сторон длины *l* поле еще не достигло. Правая же часть

$$\mu_0 (I + \varepsilon_0 \frac{dN}{dt}) = \mu_0 il - \mu_0 \varepsilon_0 2Elc, \tag{27}$$

что с учетом (22), (16) и (25) тоже дает нуль. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в справедливости (IV-17) и для контура Γ_3.

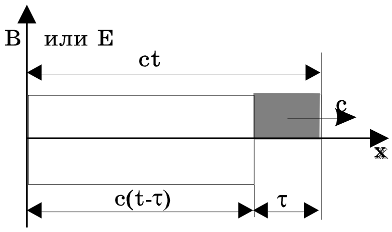


Рис. 7

Итак, приведенное решение всюду удовлетворяет уравнениям Максвелла (17), а потому оно верно и единственно[37]. Но пока распространяющиеся поля остаются «привязанными» к излучающей плоскости с током, ибо простираются от границы $x = \pm ct$ до этой плоскости. Однако теперь уже легко «оторвать» их от нее. Если через время τ после появления тока *i* включить встречный ток $-i$, т. е. просто выключить *i*, то по принципу суперпозиции (а он выполняется и для переменных полей – это следует все из тех же уравнений Максвелла) от него побежит волна «минус»-полей, которые наложатся на первоначальные и погасят их (рис. 7). Останется только слой толщины $c\tau$; он оторвется от плоскости и полетит в обе стороны от нее со скоростью *c*.

Оказывается, что полученные на рассмотренном частном примере свойства полей ***E*** и ***B***, являются общими, присущими любой электромагнитной волне. Перечислим их.

1. Величины ***E*** и ***B*** всегда связаны соотношением (22)

$$E = Bc.$$

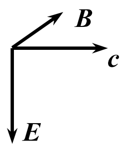


Рис. 8

2. Скорость распространения любой волны дается формулой (25)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Рис. 9

3. Три вектора ***E***, ***B*** и ***c*** (порядок существен!) взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую тройку (рис. 8). Это значит, например, что если смотреть вдоль третьего (***c***), то поворот от первого (***E***) ко второму (***B***) по кратчайшему пути должен происходить по часовой стрелке.

Если поверхностный ток заставить течь по нашей плоскости по закону

$$i = i_0 \cos\omega t, \tag{28}$$

то, аппроксимируя его ступенчатой функцией (рис. 9) и накладывая поля каждой такой «ступеньки», можно получить с любой заданной точностью гармоническую электромагнитную волну. Для нее справедливо четвертое общее свойство волн.

4. Поля ***E*** и ***B*** в любой (бегущей) волне колеблются синфазно, т. е. в фиксированной точке пространства одновременно достигают максимума проходят через нуль и т. д. На рис.10 изображено мгновенное распределение в пространстве векторов ***E*** и ***B***. Такой же вид будут иметь, очевидно, зависимости этих векторов от времени для произвольной точки пространства.

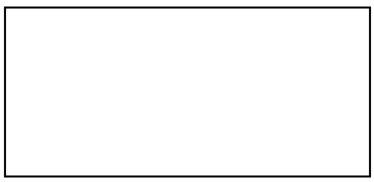


Рис. 10

Контрольные вопросы и задания

1. Какие из статических уравнений Максвелла должны быть изменены (на динамические) для объяснения возможности существования электромагнитных волн?

2. Показать, что для магнитного поля сферически симметричного тока, вытекающего из какого-либо центра, не выполняется теорема о циркуляции. В чем причина этого нарушения?

[37] При некоторых дополнительных разумных условиях, которые *на практике всегда* выполняются.

3. Привести соображения, приведшие Максвелла к необходимости введения тока смещения в одно из статических уравнений. В какое именно? Написать выражение для тока смещения.
4. Написать электродинамическую систему уравнений Максвелла. Чем она отличается от статической?
5. Привести решение уравнений Максвелла для излучения бесконечной проводящей плоскости.
6. Описать методику, использованную в настоящей лекции для определения электромагнитного поля бесконечной излучающей плоскости.
7. Перечислить основные свойства любой электромагнитной волны.

Лекция 26

Глава 15. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Что такое свет? Почему справедливы законы, лежащие в основе геометрической оптики? Всегда ли они выполняются? Вот некоторые из многих физических вопросов, оставляемых в стороне геометрической оптикой, на которые мы попытаемся ответить в этой главе.

ДВА ВЗГЛЯДА НА ПРИРОДУ СВЕТА

Издавна существовало два параллельно развивавшихся взгляда на природу света, две конкурирующие друг с другом точки зрения – корпускулярная и волновая. Основоположником первой был Ньютон, второй – Гюйгенс.

§15.1. Корпускулярная теория

Согласно теории Ньютона свет представлял собой поток быстро летящих частиц – корпускул. Отсюда сразу вытекала прямолинейность распространения световых лучей, а также закон отражения, являющийся следствием упругого удара частиц об отражающую поверхность. Закон преломления объяснялся притяжением световых корпускул более «плотной» преломляющей средой, которая в непосредственной близости от границы раздела искривляла их траектории, а также меняла скорости частиц. На современном (классическом) языке это объяснение выглядит следующим образом.

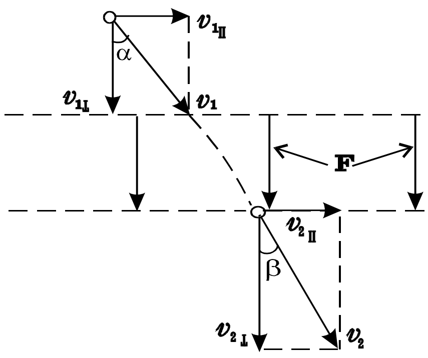


Рис. 1

Вблизи границы образуется тонкий переходный слой, внутри которого действует однородное поле сил, перпендикулярное поверхности (рис. 1)[38]. Оно вызывает скачок потенциальной энергии частицы при переходе из одной среды в другую, что влечет за собой изменение её скорости $\boldsymbol{v}$. Согласно закону сохранения механической энергии

$$W_1 + U_1 = W_2 + U_2, \tag{1}$$

где W и U – соответственно кинетическая и потенциальная энергии частицы, или

$$W_2 = W_1 + U_1 - U_2. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$v_2^2 = v_1^2 + const, \tag{3}$$

причем константа, очевидно, *не зависит* от угла падения α. Другими словами все частицы, подлетающие к границе с одинаковыми по величине скоростями v_1, но под разными углами к нормали, после преломления будут двигаться в среде 2 *с одной и той же* скоростью v_2.

Поскольку, далее, сила действует нормально к поверхности, касательная составляющая скорости измениться не может, т. е.

$$v_{1\parallel} = v_{2\parallel} \tag{4}$$

(см. рис. 1), и, стало быть,

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta, \tag{5}$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_2}{v_1} = n = const \tag{6}$$

для любого угла α. Если частица летит навстречу тормозящему полю (из второй среды в первую), то при достаточно косом падении нормальная составляющая скорости уменьшается настолько, что частица оказывается не в состоянии преодолеть стоящий на её пути потенциальный барьер: происходит полное отражение.

Интересно отметить, что по этой теории угол, образуемый направлением света с нормалью, тем больше, чем меньше скорость его распространения в данной среде (что, как известно, противоречит проведенным позже измерениям).

Объяснение закона независимости световых пучков сталкивается в этой теории с некоторыми трудностями. Све-

[38] Подобный двойной электрический слой, приводящий к появлению контактной разности потенциалов, образуется при контакте двух разнородных проводников.

товые частицы должны были как-то взаимодействовать друг с другом, а встретившиеся световые пучки оказывать взаимное влияние. Приходилось наделять корпускулы особыми свойствами, т. е. считать их частицами, взаимодействующими с веществом, но не взаимодействующими друг с другом.

§15.2. Волновая теория

В соответствии с волновой концепцией Гюйгенса свет представлял собой волновое движение частиц особой среды – эфира, заполняющего все пространство. Закон независимости световых пучков вытекал отсюда с очевидностью как следствие принципа суперпозиции, хорошо выполняющегося для механических волн. Законы отражения и преломления также вполне корректно объяснялись волновой теорией. Для доказательства их, однако, необходимо привлекать некий общий геометрический принцип, выдвинутый Гюйгенсом и носящий его имя.

Согласно принципу Гюйгенса *каждая точка среды, до которой дошло волновое возмущение, сама становится источником вторичных сферических волн. Огибающая этих волн (их фронтов) в любой момент времени t представляет собой действительный фронт волны в этот момент*. При этом вторичные источники вовсе не обязательно выбирать на волновой поверхности; их выбор произволен и диктуется соображениями удобства решения данной задачи. Просто те из них, до которых возмущение дошло раньше, раньше начинают и излучать, так что вторичные волны от них успевают к данному моменту отойти на бóльшие расстояния.

В рассуждениях Гюйгенса заложено основное свойство волнового процесса: фронт волны, испущенный излучателем, движется дальше совершенно независимо от колебаний источника. Каждая частица связана упругими связями[39] не с источником, а лишь со своими ближайшими соседями, так что все они повторяют движения излучателя с некоторым запаздыванием. Поэтому любая точка среды, до которой дошло возмущение, вовлекается в движение соседней частицей точно так же, как если бы вместо нее рядом находилась мембрана излучателя.

Получим, исходя из принципа Гюйгенса, закон преломления света (закон отражения выводится совершенно аналогично). Пусть плоская волна (тонкий световой пучок толщиной d) падает на границу раздела (тоже плоскую) под некоторым углом α (рис. 2). Расположим вторичные источники в плоскости раздела сред. Тогда источник A первым начнет излучать вторичные волны, источник B – несколько позже, а через время τ, когда фронт волны AD достигнет точки C, начнет излучать и этот источник.

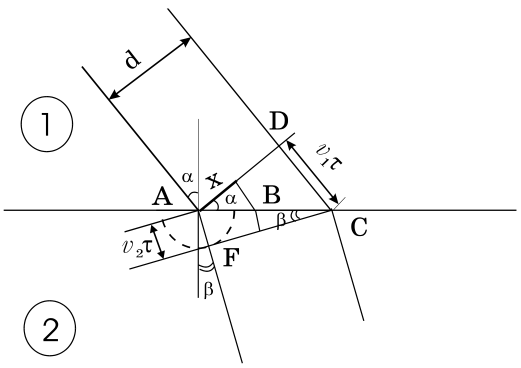


Рис. 2

Задержка, с которой «включаются» вторичные источники, расположенные вдоль AC, будет, очевидно, пропорциональна их расстоянию от точки A, и, таким образом, время излучения до момента τ, а следовательно, и радиусы вторичных волн, распространяющихся в среде 2, будут линейно спадать с этим расстоянием. Таким образом, фронт волны FC в среде 2 (огибающая вторичных волн) окажется тоже плоским, но наклоненным к границе раздела под другим углом. Соответственно изменится и направление распространения пучка, перпендикулярное волновому фронту. Из треугольников ADC и AFC

$$AC = \frac{v_1\tau}{\sin\alpha} = \frac{v_2\tau}{\sin\beta}, \tag{7}$$

откуда и следует закон преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n = const, \tag{8}$$

в который, однако, входит обратное (6) отношение скоростей, уже согласующееся с экспериментом.

Что же касается прямолинейности распространения света, то она долгое время не находила объяснения в волновой теории, ибо вопрос этот не был поставлен в связь с явлениями нарушения при определенных условиях этой прямолинейности, т. е. с явлениями дифракции.

Ниже мы рассмотрим два обширных и тесно связанных друг с другом класса явлений, могущих быть истолкованными только с волновой точки зрения – интерференцию и дифракцию.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

Как показывает опыт, для волн обычно выполняется принцип суперпозиции[40], согласно которому при одновременном действии двух (или более) источников волновое возмущение в каждой точке есть векторная сумма возмущений, посылаемых в эту точку каждым отдельно взятым источником. Наибольший интерес представляет случай, когда источники излучают гармонические волны одинаковых частот. При этом в каждой точке будет возбуждаться, очевидно, гармоническое колебание той же частоты, амплитуда которого зависит в частности от *разности фаз* пришедших в эту точку волн. Поскольку эта разность является функцией расстояния точки наблюдения до источников, в области перекрытия волн установится картина колебаний с чередующимися в пространстве максимумами и минимумами их амплитуд. Если эти источники – два совершенно идентичных световых излучателя, то на экране, освещаемом ими одновременно, должна, следовательно, появиться описанная картина. Обычный же опыт показывает, что ничего подобного в действительности не происходит: освещённость экрана монотонно меняется от точки к точ-

[39] Для электромагнитных волн роль упругих и инертных свойств среды играют эффекты взаимного превращения электрического и магнитного полей.

[40] Нарушение этого принципа может наблюдаться при достаточно больших амплитудах волн, когда начинают сказываться нелинейные свойства среды (например, отступление от закона Гука для случая упругих волн).

ке.

Таким образом, повседневные наблюдения, казалось бы, опровергают волновую природу света. Противоречие это, однако, кажущееся и связано со спецификой излучения света атомами.

§15.3. Когерентность

В настоящее время можно считать твердо установленным, что свет представляет собой электромагнитные волны очень высокой частоты. Длины этих волн (в вакууме) простираются приблизительно от 0,4 до 0,8 микрометра, или от 4000 Å до 8000 Å (в оптике часто длину волны измеряют в ангстремах; 1 Å = 10^{-10} м).

Механизм испускания атомом электромагнитных волн является сугубо квантовым эффектом и кратко сводится к следующему. Под влиянием какого-либо внешнего воздействия (например, при нагревании) атом переходит в возбужденное состояние, поглощая определенную порцию энергии. Затем он возвращается в исходное положение, испуская в течение некоторого времени полученную энергию в виде электромагнитной волны постоянной частоты. Далее процесс повторяется, причем начало следующего акта излучения никак не связано с окончанием предыдущего. Таким образом, атом испускает свет в виде нерегулярно следующих друг за другом отрезков синусоиды, т. е. так называемых «цугов» волн. Оценки показывают, что в самых благоприятных условиях[41] время t испускания одного цуга не превышает 10^{-8} с (обычно оно на несколько порядков меньше).

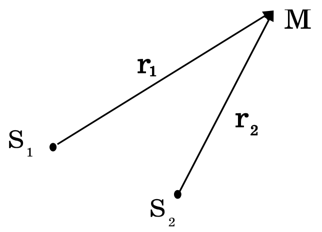


Рис. 3

Выберем какую-либо точку наблюдения M и рассмотрим волны, пришедшие в нее от двух каких-то атомов, принадлежащих разным источникам (рис. 3). Пусть атомы эти излучают цуги одной частоты, так что в точку M от них приходят колебания

$$y_1(t) = A_1\cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1),$$
$$y_2(t) = A_2\cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2), \tag{9}$$

где r_1 и r_2 – расстояния точки M от источников S_1 и S_2, а φ_1 и φ_2 – начальные фазы их колебаний, определяемые моментом начала испускания цуга. Амплитуда результирующего колебания может быть найдена методом векторных диаграмм (см. лекцию 20); соответствующие построения приведены на рис.4[42]. Применяя к треугольнику амплитуд теорему косинусов, получим

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[-k(r_2 - r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1)], \tag{10}$$

т. е. амплитуда A_Σ в точке M зависит от её положения ($\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_1$) и разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$.

Если эта разность сохраняет постоянное значение в течение времени, достаточного для наблюдения, то говорят, что имеет место интерференция волн, а полученную картину называют интерференционной. Для нее характерны периодические изменения амплитуды при переходе от точки к точке. *Колебания и волны, сохраняющие постоянную разность фаз в течение времени, достаточного для наблюдения, называются когерентными.* Таким образом, когерентные волны – это те, которые могут интерферировать.

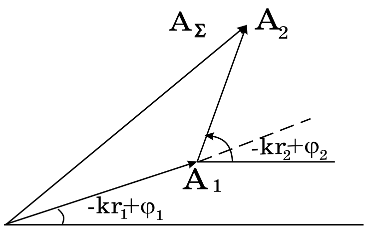


Рис. 4

Если же разность начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ не сохраняется в течение необходимого для наблюдения времени, а хаотически меняется много раз, принимая всевозможные значения в интервале $0 \div 2\pi$, то такие колебания и волны называются некогерентными. Регистрируемая картина в этом случае представляет собой результат усреднения многих «мгновенных» быстро сменяющихся интерференционных картин, соответствующих всевозможным значениям начальных фаз φ_1 и φ_2. При этом, очевидно, в области перекрытия волн будет наблюдаться монотонное изменение результирующей амплитуды. Действительно для любой точки с заданными $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_1$ аргумент косинуса в (10) за время усреднения много раз случайным образом изменится, равномерно заполняя интервал $0 \div 2\pi$, так что среднее значение косинуса будет равно нулю и последний член в формуле (10) исчезнет. Таким образом, для любой точки результирующая интенсивность I_Σ , пропорциональная квадрату амплитуды, будет равна сумме интенсивностей I_1 и I_2 , даваемых в этой точке каждым атомом в отдельности:

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 \, . \tag{11}$$

Именно такая ситуация и имеет место при наложении волн, идущих от двух независимых, пусть даже совершенно идентичных источников. Среднее время излучения каждым атомом цуга оказывается на много порядков меньше времени, необходимого для фиксации интерференционной картины, и наблюдается просто сложение освещенностей[43]. Можно показать, что если имеется не два, а несколько некогерентных источников, то получаемая усредненная картина и в этом случае соответствует суммированию в каждой точке интенсивностей пришедших волн.

Итак, получить интерференционную картину от двух нелазерных источников невозможно. Однако Френель предложил прием, все же позволяющий добиться устойчивой интерференции, используя обычные источники света.

[41] Речь идет о нелазерных источниках света.
[42] Такое сложение возможно только в том случае, если векторы $\boldsymbol{E}$ в накладывающихся волнах одинаково направлены, или, как говорят, волны имеют одинаковую поляризацию.
[43] Чтобы получить картину наложения волн от двух *источников*, нужно еще просуммировать эффект по всем их атомам. Атомы эти излучают волны разных частот и всевозможных поляризаций. Это приводит, очевидно, к дополнительному «расплыванию» даже мгновенных интерференционных картин, что делает их еще более труднодоступными для наблюдения.

§15.4. Осуществление когерентных волн в оптике

Идея метода Френеля состоит в том, чтобы расчленить каким-либо образом свет, испускаемый одним источником, на две части и заставить их пройти разные пути, а затем снова встретиться. При этом каждый цуг волн тоже расчленится на два, причем совершенно одинаковых по всем основным параметрам: частоте, длительности, амплитуде, поляризации и начальной фазе φ[44]. Мгновенная интерференционная картина (распределение амплитуд) будет описываться выражением (10), где, очевидно, $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, а $r_2 - r_1$ представляет собой разность оптических путей, пройденных цугами до места встречи. Через время τ цуг оборвется, но затем снова возникнет, правда с другой начальной фазой φ[45]. Однако он тоже разделится на два «близнеца», для которых опять $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ и аргумент косинуса в (10) определится теми же самыми r_2 и r_1. Это значит, что распределение амплитуд в наблюдаемой картине при смене цуга *останется тем же*, а следовательно, картина эта останется устойчивой сколь угодно долгое время.

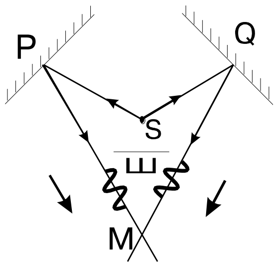


Рис. 5

Практически расчленение света на два интерферирующих пучка может быть реализовано различными способами. Приведем в качестве примера некоторые из распространенных интерференционных схем.

Бизеркало Френеля (рис. 5; упрощенная схема). Световые лучи от точечного источника *S* падают на два плоских зеркала, образующих двугранный угол, близкий к π, и, отражаясь, интерферируют в точке *M*. Пришедшие сюда волны оказываются когерентными; разность их фаз в точке *M* определяется только разностью оптических путей *SP+PM* и *SQ+QM*[46]. Понятно, что она не может быть больше длины цуга, иначе интерферирующие цуги вовсе не встретятся. Существенно, что возникающие при отражении изменения поляризации падающей волны, а также могущие возникать дополнительные набеги фазы совершенно одинаковы для обоих лучей, а потому никак не скажутся на интерференционной картине.

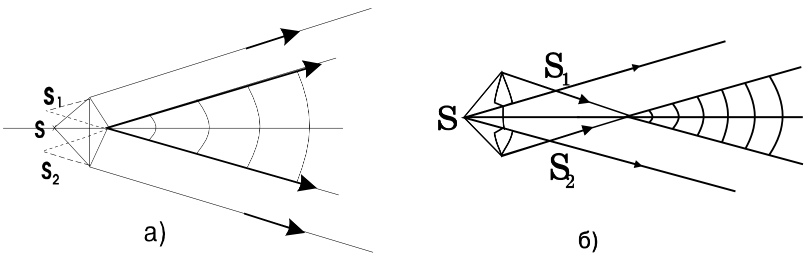


Рис. 6

На рис. 6 изображены еще две практические схемы: **бипризма Френеля** и **билинза Бийе**. Первая дает два мнимых, вторая два действительных изображения источника *S*. Интерференция наблюдается в области перекрытия (заштрихована на рис. 6) пучков, посылаемых источниками-изображениями. Существуют и другие схемы, позволяющие получить когерентные волны и являющиеся практическим воплощением все той же идеи Френеля.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Под дифракцией понимают отклонение распространения света от прямолинейности (не связанное с отражением или преломлением.). Дифракция проявляется в огибании светом препятствий, стоящих на его пути. Центральное место в объяснении этого явления, а также в расчете ряда дифракционных задач, занимает принцип Гюйгенса, существенно дополненный Френелем.

§15.5. Принцип Гюйгенса–Френеля

В толковании Френеля этот принцип позволяет находить не геометрический фронт волны, используя вторичные источники, а её амплитуду в любой точке как результат взаимной интерференции вторичных волн. Принцип Гюйгенса – Френеля формулируется следующим образом.

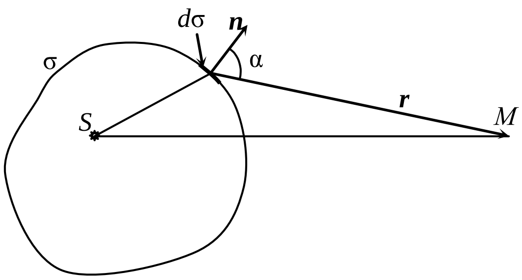


Рис. 7

Окружим источник света *S* (не обязательно точечный) произвольной замкнутой поверхностью σ (рис. 7). Для расчета светового возмущения в любой точке *M* можно источник *S* устранить, а поверхность σ рассматривать как светящуюся, считая, что каждый её малый элемент *d*σ испускает сферическую волну

$$y(r,t) \sim \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi). \qquad (12)$$

Частота её ω совпадает с частотой источника *S*, а начальная фаза φ равна (с точностью до некоторой константы) фазе действительного колебания, пришедшего из *S* в *d*σ. Амплитуда *A* пропорцио-

[44] Такая упрощенная классическая трактовка происходящего, строго говоря, не вполне соответствует действительности и должна быть заменена более общим подходом, учитывающим квантовую структуру света. Однако при описании рассматриваемых интерференционных явлений структура эта никак не сказывается на результатах и учет ее приводит лишь к более сложному их *толкованию*.

[45] Но той же частотой; для таких опытов обычно используют источники, атомы которых излучают свет строго определенной частоты (или нескольких частот, достаточно далеко отстоящих друг от друга).

[46] От прямых лучей зона наблюдения загорожена непрозрачной ширмой Ш.

нальна амплитуде пришедшего колебания, а также площади вторичного источника $d\sigma$. Кроме того, она оказывается зависящей от направления излучения. Эффективнее всего $d\sigma$ излучает вдоль нормали $\boldsymbol{n}$; с ростом угла α между $\boldsymbol{n}$ и направлением на точку наблюдения амплитуда падает, уменьшаясь до нуля при $\alpha = \pi/2$. Принцип утверждает, что наблюдаемое в M возмущение может быть представлено как результат интерференции всех вторичных волн (12). Если между S и M имеются непрозрачные экраны, то поверхность σ должна всюду совпадать с ними, а отверстия в них и промежутки между ними затягивать произвольным образом; амплитуды вторичных источников на поверхности экранов полагаются равными нулю.

Следует иметь в виду, что приведенные рассуждения имеют характер не закона, а именно принципа, некого рецепта, с помощью которого получаются выводы, согласующиеся с экспериментом. Именно этим обстоятельством оправдывается некоторая неточность его формулировки в отношении начальных фаз и амплитуд вторичных источников. Тем не менее, он оказался чрезвычайно плодотворным и позволил не только качественно, но и количественно решить очень многие проблемы волновой оптики. Задачи, в которых рассматривается интерференция волн вторичных источников, мы будем называть дифракционными.

§15.6. Метод зон Френеля

Воспользуемся принципом Гюйгенса – Френеля для анализа простейшей задачи – расчета светового возмущения частоты ω, вызываемого точечным источником S в произвольной точке M (рис. 8).

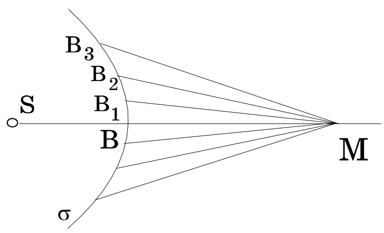


Рис. 8

Выберем в качестве вспомогательной поверхности σ фронт распространяющейся волны в какой-то момент времени, т. е. сферу радиусом SB с центром в S. Тогда, очевидно, все вторичные источники на ней будут колебаться в фазе.

Разобьем далее эту поверхность на кольцевые концентрические области с центром в точке B (где отрезок SM пересекает фронт волны) – так называемые зоны Френеля (центральное пятно, очевидно, можно рассматривать как кольцо с бесконечно малым внутренним радиусом). Радиусы окружностей, ограничивающих каждую зону, выберем из следующего условия:

$$B_1M - BM = B_2M - B_1M = B_3M - B_2M = \ldots = \frac{\lambda}{2}, \qquad (13)$$

где λ – длина световой волны. Другими словами, зоны мы выбираем таким образом, чтобы волны, пришедшие в точку M от краев каждого такого кольца, были в противофазе. Можно показать, что площади всех зон оказываются при этом практически одинаковыми.

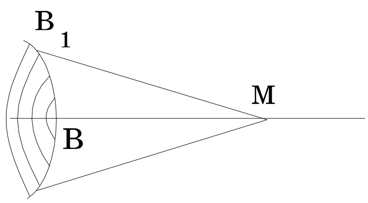


Рис. 9

Рассмотрим сначала только первую зону и найдем её вклад в результирующее колебание в точке M. Для этого теперь уже её разделим точно так же на n еще более мелких равных по площади колец (рис. 9) и просуммируем с помощью метода векторных диаграмм колебания, посылаемые в точку M каждым кольцом. Все эти колебания окажутся сдвинутыми друг относительно друга по фазе; сдвиг этот определяется разницей расстояний соответствующих колец от точки M. Очевидно, что при движении по сфере от B к B_1 расстояние до M будет постепенно возрастать и колебания будут приходить туда все с бóльшим запаздыванием. На рис. 10 изображена векторная диаграмма колебаний, пришедших в точку M от первой зоны Френеля, когда она разбита на $n = 6$ колец. $\Delta \boldsymbol{A}_1, \Delta \boldsymbol{A}_2, \ldots \Delta \boldsymbol{A}_n$ – приблизительно одинаковые амплитуды, соответствующие 1-му, 2-му,..., n-му кольцам. Угол между векторами

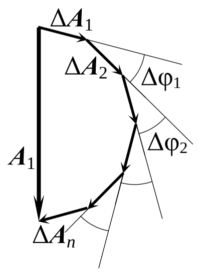


Рис. 10

$$\Delta\varphi_i = k\Delta r_i, \qquad (14)$$

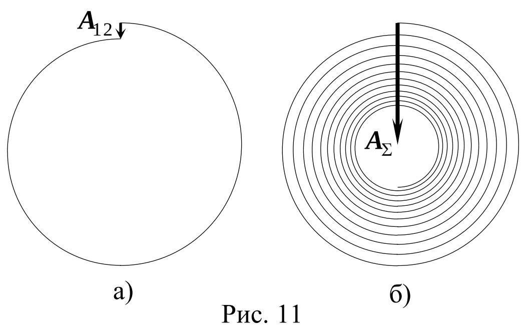


Рис. 11

где Δr_i – разность расстояний от (i+1)-го и i-го колец до точки M. При $n \to \infty$ ломаная, изображенная на рис. 10, переходит в гладкую кривую, а векторы $\Delta \boldsymbol{A}_1$ и $\Delta \boldsymbol{A}_n$ оказываются противоположно направленными, что соответствует разнице расстояний $\lambda/2$ от края и центра зоны до M. Результирующий вектор $\boldsymbol{A}_1$, замыкающий полученную дугу, и представляет собой вклад в световое возмущение в точке M первой зоны Френеля.

Теперь уже нетрудно понять, что будет в M, когда действуют лишь две первые зоны Френеля. Диаграмма для этого случая изображена на рис. 11 а. Действие второй зоны почти полностью компенсирует действие первой, и результирующая амплитуда близка к нулю. Компенсация все-таки оказывается неполной, ибо вклад вторичных источников немного падает с удалением от точки B (рис. 8): во-первых, увеличивается их расстояние до M и, во-вторых, растет угол между нормалью к поверхности и направлением на точку M.

Добавляя к первым двум третью, четвертую и т. д. зоны, получим диаграмму действия всей волны (рис. 11 б). Интересно, что амплитуда $\boldsymbol{A}_\Sigma$ при этом получается примерно вдвое меньше амплитуды $\boldsymbol{A}_1$ действия первой зоны, что вполне подтверждается экспериментально.

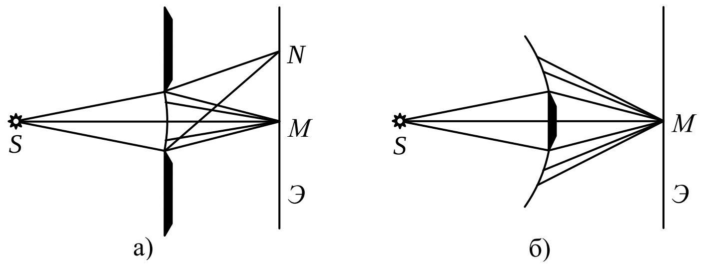


Рис. 12

а) б) в)

Рис. 13

§15.7. Дифракция на круглых отверстии и диске

Приведенные рассуждения позволяют без труда получить картину на экране при дифракции на малых отверстии и диске (рис. 12 а и б). В первом случае оказываются открытыми несколько первых зон, во втором – они оказываются закрытыми.

Если открыто малое нечётное число зон Френеля, то векторная диаграмма *в центре* картины подобна изображенной на рис. 10: в точке M будет максимум освещенности. При удалении точки наблюдения от центра экрана «несфазированность» вторичных источников будет возрастать, а результирующая амплитуда – падать. Можно показать (качественно рассуждения здесь те же, что и при рассмотрении дифракции на щели, приводимые в следующей лекции), что при движении от центра освещённость меняется не монотонно, а (говоря нестрого) периодически, проходя через ряд максимумов и минимумов.

Таким образом, дифракционная картина будет иметь вид чередующихся светлых и темных концентрических колец, причем в центре – светлое пятно (рис. 13 а).

Если открыть малое чётное число зон, то диаграмма колебаний в точке M будет подобна диаграмме рис. 11 а и в центре картины окажется темное пятно (рис. 13 б).

В случае дифракции на диске картина всегда похожа на изображенную на рис. 13 в. Действительно, векторная диаграмма для этого случая в центре картины представлена на рис. 14, из которого следует, что при любом (четном или нечетном) небольшом числе закрытых зон в середине геометрической тени должно наблюдаться светлое пятно, интенсивность которого приблизительно равна интенсивности при облучении прямыми лучами.

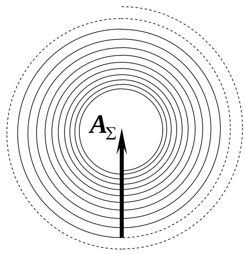
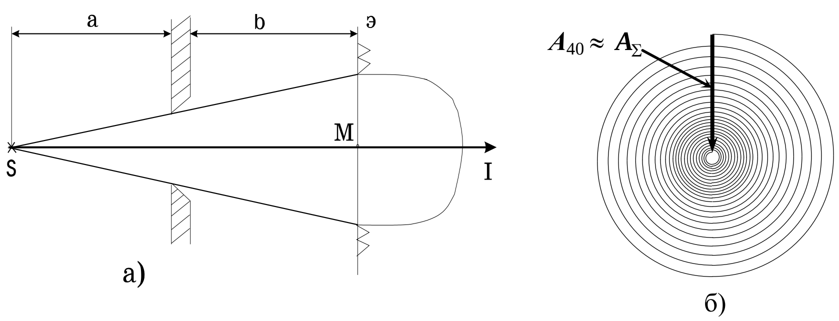


Рис. 14

§15.8. Прямолинейность распространения волн

Исходя из изложенных выше соображений Френеля, нетрудно объяснить и прямолинейность распространения света, вернее указать те рамки, в которых она наблюдается. Если открыть или закрыть лишь несколько первых зон, то, как мы видели, прямолинейность нарушается: получающаяся на экране картина ничего общего с образованием геометрической тени не имеет. Свет как бы огибает препятствия и заходит за их края.

Если же, однако, открыть достаточно большое число зон Френеля (30 – 40)[47], то характер их дифракционной картины качественно меняется (рис. 15 а). За 30 – 40 полуоборотов спираль Френеля для центральной точки M практически уже стянется к центру (рис. 15 б), и дальнейшее открывание зон к изменению освещенности экрана в этой точке не приведет. Это значит, что в точку M вся световая энергия поступает через небольшое отверстие диаметром порядка сантиметра (для $a \sim в \sim 1$м), т. е. световой поток распространяется прямолинейно внутри узкого канала вдоль луча SM. Расчеты показывают также, что при этом дифракционные кольца, уменьшаясь по ширине и интенсивности, все теснее группируются вокруг среднего светлого пятна, которое, в свою очередь, будет иметь все более резко очерченные края, совпадающие с границей геометрической тени, причем освещённость этого пятна окажется близкой к равномерной (рис. 15).



а) б)

Рис. 15

Аналогичная ситуация наблюдается также и в том случае, если *закрыть* 30 – 40 зон: при *больших размерах* препятствия на экране образуется тень, очертания которой подобны форме препятствия.

Таким образом, если размеры объектов, проектируемых на экране, достаточно велики по сравнению с характерным *размером зоны Френеля*, оказывается справедливым закон прямолинейного распространения световых пучков; в противном случае имеют место явления дифракции[48].

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать основные законы геометрической оптики. Объяснение каких из них сталкивается с трудностями в корпускулярной (Ньютона) и волновой (Гюйгенса) теориях?
2. Как корпускулярная теория объясняет закон преломления?
3. Сформулировать принцип Гюйгенса. Как закон преломления объясняет волновая теория? Какое из объяснений полностью согласуется с экспериментом?
4. Что такое интерференция волн? Какие источники называются когерентными? Почему картина наложения света от двух (незерных) источников не является интерференционной?
5. В чем состоит френелевская идея осуществления когерентных волн в оптике?

[47] Для $a \sim в \sim 1$м это соответствует отверстию диаметром порядка сантиметра.

[48] При этом размеры препятствий могут быть много больше длины волны; например, для $a \sim в \sim 1$м радиус первой зоны Френеля $r_1 \sim 10^3\lambda$.

6. Привести интерференционные схемы, использующие бизеркало и бипризму Френеля, а также билинзу Бийе.
7. Что такое дифракция света? Какому закону геометрической оптики противоречит это явление?
8. Сформулировать принцип Гюйгенса-Френеля.
9. В чем состоит метод зон Френеля? Используя этот метод, построить векторную диаграмму для светового возмущения, вызываемого точечным источником в произвольной точке.
10. Привести схемы опытов по наблюдению дифракции на круглых отверстии и диске. Изобразить дифракционные картины и векторные диаграммы в центре экрана для следующих случаев:
    а) открыто малое чётное число зон Френеля;
    б) открыто малое нечётное число зон;
    в) закрыто малое чётное число зон Френеля;
    г) закрыто малое нечётное число зон.
11. Объяснить прямолинейность распространения света и указать те рамки, в которых она наблюдается.

Лекция 24

Принцип Гюйгенса – Френеля является достаточно эффективным инструментом решения задач волновой оптики. С его помощью могут быть описаны принцип действия и характеристики многих оптических приборов. В качестве примера рассмотрим его применение для анализа одного из таких приборов – дифракционной решетки. Дифракционной решеткой называют систему большого числа узких и близко расположенных параллельных щелей, проделанных в непрозрачном экране. В простейшем случае она может быть изготовлена в виде стеклянной пластинки, на которую с помощью специального устройства с высокой точностью наносится ряд параллельных идентичных эквидистантных штрихов («царапин»), разделенных неповрежденными участками стекла – щелями. Применяемые в настоящее время дифракционные решетки имеют обычно от нескольких сот до нескольких тысяч штрихов на 1 мм.

Прежде чем перейти к исследованию явлений прохождения света через дифракционную решетку рассмотрим более простую задачу дифракции света на одной щели.

§15.9. Дифракция на щели

Направим на щель *параллельный* пучок лучей (именно в таких условиях используются решетки на практике), полученный, например, с помощью собирающей линзы с расположенным в её фокусе точечным источником. За щелью поместим вторую линзу, в фокальной плоскости которой установлен экран для наблюдения изображения светящейся точки. Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая нормального падения лучей на щель, представленного на рис. 1. Если длина щели много больше её ширины (что, конечно, выполняется для дифракционных решеток), то задача оказывается одномерной и в этом случае изображение точки S на экране $Э$ будет представлять собой узкую линию с чередующимися максимумами и минимумами, расположенную перпендикулярно щели (падающая волна считается монохроматической). При использовании в качестве источника светящейся нити, параллельной щели, картина на экране лишь растянется в направлении нити, т. е. задача по-прежнему может считаться одномерной.

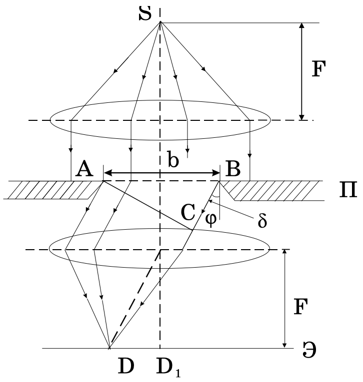
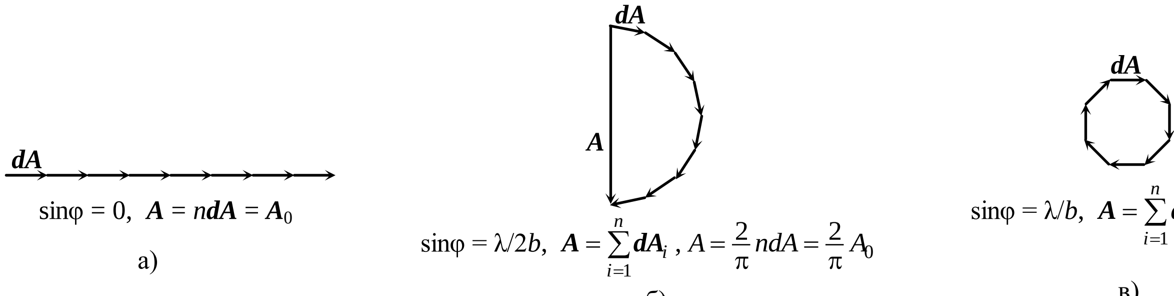


Рис. 1

Для определения интенсивности световой волны в произвольной точке экрана (рис. 1) воспользуемся принципом Гюйгенса – Френеля, разбив «поверхность» щели (т. е. фронта плоской волны, совпадающего в какой-то момент времени с поверхностью перегородки *П*) на n узких параллельных полосок равной ширины, являющихся источниками вторичных волн. Учитывая равенство фаз и амплитуд этих источников, а также то обстоятельство, что линза не вносит дополнительной разности фаз проходящих сквозь нее лучей[49], амплитуду результирующего колебания в точке D можно представить в виде суммы n одинаковых по величине векторов, повернутых друг относительно друга на равные углы $\Delta\alpha = \frac{\alpha}{n}$. Угол α определяется разностью фаз колебаний, пришедших в точку D от крайних элементов волнового фронта (совпадающего с поверхностью щели), соответствующих точкам A и B на рис. 1. Если $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, то, очевидно,

$$\alpha = k \cdot BC = 2\pi \frac{b \sin\varphi}{\lambda}. \tag{1}$$

Вдоль центральной линии экрана (перпендикулярной плоскости рис. 1 и пересекающей её в точке D_0), являющейся проекцией светящейся нити S на экран, будет наблюдаться максимум освещенности (нулевого порядка). Диаграмма для этого случая представлена на рис. 2 а, где длина результирующего вектора $\boldsymbol{A}$ просто равна сумме длин его слагающих. При перемещении точки наблюдения в направлении, перпендикулярном щели, освещённость будет посте-



$\sin\varphi = 0$, $\boldsymbol{A} = n\boldsymbol{dA} = \boldsymbol{A}_0$

а)

$\sin\varphi = \lambda/2b$, $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{dA}_i$, $A = \frac{2}{\pi} n dA = \frac{2}{\pi} A_0$

б)

$\sin\varphi = \lambda/b$, $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{dA}_i$, $A = 0$

в)

Рис. 2

[49] Это – следствие так называемого *таутохронизма* оптических систем. В рамках волновой оптики получение изображения светящейся точки S есть результат интерференции (взаимного усиления) световых пучков, испущенных S по различным направлениям и перехваченных системой. Это значит, что волны, идущие по различным путям сквозь оптическое устройство, должны приходить в точку-изображение в фазе, т. е. разности хода между ними возникать не должно.

пенно спадать. При $\varphi = \arcsin\frac{\lambda}{2b}$ амплитуда результирующего колебания уменьшается в $\frac{\pi}{2}$ раз по сравнению с её максимальным значением в точке D_0 (рис. 2 б), а при дальнейшем возрастании угла дифракции, когда $\sin\varphi = \frac{\lambda}{b}$ она обращается в нуль (рис. 2 в). Если продолжать увеличивать φ, то освещённость начнет возрастать, достигнет максимума, затем снова спадет до нуля и т. д.

Нетрудно видеть, что участкам экрана с нулевой освещённостью соответствуют углы, для которых

$$b\sin\varphi = \lambda k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (2)$$

Направления, соответствующие максимумам интенсивности *высших* порядков дифрагировавших волн, могут быть найдены из приближенного условия

$$b\sin\varphi = \frac{\lambda}{2}(2k+1), \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (3)$$

Максимумы освещенности не одинаковы по величине и уменьшаются с ростом порядка k. Наибольшей интенсивностью I_0 обладает нулевой максимум, соответствующий $\varphi = 0$. Интенсивности остальных максимумов определяются приближенным соотношением

$$I_k \approx \left[\frac{2}{(2k+1)\pi}\right]^2 I_0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (4)$$

являющимся, так же как и (3), следствием построений, приведенных на рис. 2.

Из полученных выражений явствует, что положения максимумов и минимумов на экране зависят от длины волны падающего света, т. е. одиночная щель, в принципе, может быть использована для спектрального разложения немонохроматического излучения. Однако дифракционная картина при этом получается настолько расплывчатой, что различить максимумы, соответствующие разным длинам волн, практически оказывается невозможным. Для усиления четкости изображения в непрозрачной перегородке, расположенной перед экраном, делают не одну, а много параллельно расположенных одинаковых щелей, каждая из которых дает дифракционную картину, разобранную выше.

§15.10. Дифракционная решетка.

Хотя положения максимумов и минимумов на экране определяются *направлением* дифрагировавшего на щели луча, но не её *положением* (т. е. картина, даваемая одной щелью, не будет меняться при её перемещении параллельно самой себе), суммарное действие нескольких щелей не сводится к простому наложению картин, даваемых каждой щелью. При расчете такого действия необходимо учесть взаимную интерференцию волн, идущих от различных щелей, которая при достаточно большом их числе N и оказывается ответственной за качественное изменение дифракционной картины, даваемой одной щелью.

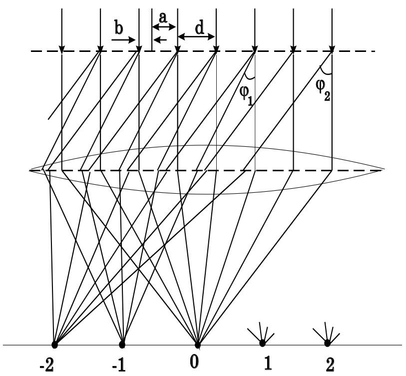


Рис. 3

Физически принцип действия дифракционной решетки может быть понят с помощью тех же рассуждений, которые приводились при рассмотрении дифракции на одной щели. Разобьем поверхность каждой из N щелей решетки на n полосок равной ширины и будем суммировать их действия в два приема: сначала найдем результирующее возмущение от соответственных участков каждой щели и затем сложим n полученных векторов. В фокусе собирающей линзы (рис. 3) будет локализован, очевидно, максимум освещенности (главный максимум нулевого порядка). При этом все nN элементарных составляющих $\boldsymbol{dA}$ результирующего вектора $\boldsymbol{A}$ расположатся вдоль одной прямой, аналогично ситуации, изображенной на рис. 2 а. Поскольку период решетки d обязательно больше ширины щели b (рис. 3), при увеличении угла дифракции φ разность хода волн, идущих от соответственных участков соседних щелей, растет быстрее, чем разность хода волн от различных участков одной щели ($d\sin\varphi > b\sin\varphi$). Если $d >> b$, то в определенном интервале φ без большой погрешности можно пренебречь набегом фазы вторичных волн в пределах щели, и в этом случае характер изменения освещенности с возрастанием угла φ может быть целиком описан с помощью построений, приведенных на рис. 2. При этом только под $\boldsymbol{dA}$ надо понимать амплитуду колебания, пришедшего в точку наблюдения от одной щели, т. е. число слагаемых результирующего вектора $\boldsymbol{A}$ оказывается не произвольным (и достаточно большим, стремящимся к бесконечности, как в случае одной щели), а равным числу штрихов решетки N. В соответствии с этим и углы $\Delta\alpha$ между соседними векторами оказываются конечными и могут достигать значительных величин.

Ближайший к главному максимуму нулевого порядка минимум будет соответствовать, очевидно, условию (рис. 2в) $Nd\sin\varphi = \lambda$, следующий – $Nd\sin\varphi = 2\lambda$, и т. д.[50] При $Nd\sin\varphi = N\lambda$, или $d\sin\varphi = \lambda$, однако, картина качественно изменится. Фазовый сдвиг между колебаниями, пришедшими в точку наблюдения от двух соседних щелей, составит при этом 2π, т. е. все N векторов $\boldsymbol{dA}$ вновь расположатся вдоль одной прямой, как это изображено на рис. 2 а. Таким образом, в этом направлении мы получим максимум освещенности (главный максимум первого порядка), по интенсивности практически не уступающий максимуму нулевого порядка. Продолжая те же рассуждения, нетрудно получить, что главные максимумы соответствуют углам, для которых

[50] Между двумя соседними минимумами, очевидно, в соответствии с произведенными выше рассуждениями, расположатся вторичные максимумы, интенсивности которых (при $\Delta\alpha \le \pi$) определяются выражением (4).

$$d\sin\varphi = \lambda k,\ k = \pm 1, \pm 2, \dots \tag{5}$$

причем, между k-м и k+1-м максимумами расположатся N – 1 минимумов, определяемых разностью хода

$$d\sin\varphi = \lambda k + \lambda \frac{m}{N},\ m = 1, 2, \dots, N-1 \tag{6}$$

и разделенных вторичными максимумами малой интенсивности.

Если теперь отказаться от сделанного выше предположения о равенстве фаз источников вторичных волн в пределах щели, то расчет дифракционной картины также может быть выполнен на основе построений, аналогичных приведенным на рис. 2. В этом случае $\boldsymbol{dA}$ – амплитуда колебаний, пришедших в точку наблюдения от соответственных участков щелей (в пределах которых уже фаза считается постоянной). Проведя для каждой из n систем таких участков суммирование элементарных амплитуд и затем складывая n полученных векторов, получим амплитуду колебаний в любой точке экрана. Сказанное проиллюстрировано на рис. 4, где построен результирующий вектор в направлении главного максимума ненулевого порядка для дифракционной решетки, состоящей из $N = 4$ щелей, каждая из которых разбивается на $n = 3$ элементарных источников вторичных волн. При этом угол $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{b\sin\varphi}{n}$, очевидно, отражает сдвиг по фазе между колебаниями двух соседних элементов одной щели.

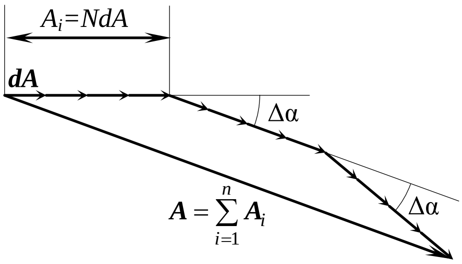


Рис. 4

Из приведенных рассуждений нетрудно показать, что в общем случае решетки с N штрихами картина на экране (рис. 5 в) будет представлять собой наложение дифракционных картин, даваемых идеальной решеткой (бесконечной протяженности с бесконечно узкими щелями) и одной щелью (соответственно рис. 5 а и б). Таким образом, самое существенное изменение, вносимое большим количеством щелей, состоит в превращении расплывчатых максимумов, даваемых одной щелью, в узкие редкие максимумы, разделенные практически темными промежутками. С увеличением числа штрихов решетки растет общий световой поток, попадающий на экран, и яркость картины возрастает. При этом одновременно увеличивается и её четкость, ибо происходит перераспределение освещенности. Действительно, если вместо одной щели на пути падающего света расположить N щелей, то прошедший поток возрастет в N раз. Амплитуда светового возмущения в направлении главных максимумов возрастет также в N раз (рис. 5), а следовательно, интенсивность – в N^2 раз, т. е. с ростом N все бóльшая часть падающего света посылается решеткой в направлении главных максимумов. Угловое расстояние $\Delta\varphi$ между главным максимумом и ближайшим минимумом (которое может быть условно принято за полуширину наблюдаемой на экране линии) определяется требованием, чтобы разность хода возросла на $\frac{\lambda}{N}$ (см.(5) и (6)):

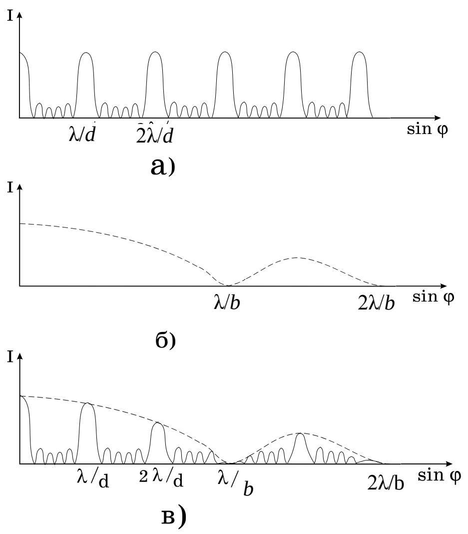


Рис. 5

$$\Delta(d\sin\varphi) = d\cos\varphi\Delta\varphi = \frac{\lambda}{N}, \tag{7}$$

откуда

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi}, \tag{8}$$

т. е. с увеличением N угловая ширина главных максимумов уменьшается (в полном соответствии с приведенными выше рассуждениями) и их резкость возрастает.

Зависимость угла дифракции падающего света от длины волны (см. (5)), с одной стороны и высокая четкость дифракционной картины, даваемой решеткой с достаточно большим числом штрихов, с другой – позволяют использовать последнюю для спектрального разложения немонохроматического света и определения длин волн различных участков спектра с большой точностью.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется дифракционной решеткой? Для каких целей она используется?
2. Привести схемы опытов для наблюдения дифракции на щели и дифракционной решетке.
3. Что такое таутохронизм оптических систем?
4. Построить векторные диаграммы для точек экрана, имеющих нулевую освещённость при дифракции на щели. Найти углы дифракции, соответствующие этим точкам.
5. То же для точек с максимальной освещённость ю. Получить формулу (4).
6. Почему картина, получаемая при дифракции на решетке, не является суперпозицией дифракционных картин, даваемых каждой щелью?
7. Найти направления на главные максимумы дифракционной решетки. Почему направления, определяемые аналогичным выражением для щели (при замене *в* на d), соответствуют минимумам освещенности экрана?
8. Найти направления на минимумы, расположенные между нулевым и первым главными максимумами решетки. Сколько всего таких минимумов?

9. Как изменится дифракционная картина, если решетку сместить вправо на полтора периода (рис. 3)?

10. Во сколько раз изменится интенсивность главных максимумов при удвоении числа штрихов решетки? Во сколько раз при этом возрастет световой поток, попадающий на экран? Как изменятся направления на главные максимумы?

11. Получить формулу, определяющую угловую ширину главного максимума решетки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Сергей Павлович КРЮКОВ

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Курс лекций
Том 2. Часть 2

Художественный редактор *И.Н.Коровин*

Подписано к печати __.__.03.
Гарнитура Таймс. Тираж ___.

Школа им.А.Н.Колмогорова
Специализированного учебно-научного центра
Московского Государственного университета им.М.В.Ломоносова
121357 Москва, ул.Кременчугская, 11

тел.449-3364
e-mail: adm@aesc.msu.ru