Лекция 11

§ 8.10. Связь между электростатическим полем и потенциалом

Между локальными (т. е. относящимися к данной точке пространства) характеристиками поля — его напряжённостью и потенциалом — существует определённая связь. Рецепт получения потенциала φ из поля ***E*** мы уже знаем: он следует из самóго определения потенциала. В соответствии с этим определением нужно соединить произвольной кривой данную точку M с нулевой точкой (обычно находящейся на ∞) и посчитать вдоль этой кривой работу сил поля, отнесённую к величине заряда. Полученное число и будет значением потенциала $\varphi(M)$ в данной точке поля M:

$$\varphi(M) = \frac{1}{q'} A_{M\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} E_{li} \Delta l_i\,, \qquad (1)$$

где E_{li} — тангенциальная проекция вектора ***E*** на i-м участке траектории, а Δl_i — его длина. Понятно, что работа эта зависит от величины и направления поля ***E*** во всех точках выбранной траектории, а потому, конечно, не будет определяться его значением в рассматриваемой точке. Другими словами, зная поле ***E*** лишь в данной точке (и её окрестности), нельзя рассчитать потенциал в этой точке; для этого нужно знать ***E*** в других точках[1].

Обратная задача, однако, носит локальный характер. Для её решения рассмотрим произвольную точку поля M, имеющую координаты x, y, z (рис. 1), и сместимся из неё на малый отрезок Δx, параллельный оси x, оставив таким образом координаты y и z неизменными. По определению приращения потенциала (9′л10)

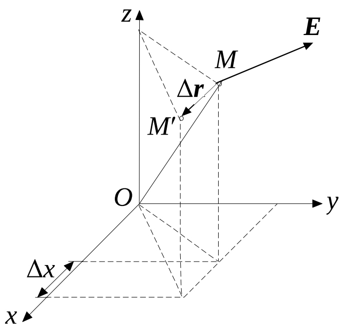


Рис. 1

$$\varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = -\frac{1}{q'} A_{MM'} \approx -E_x \Delta x,$$

где E_x — x-проекция поля ***E*** на отрезке MM', которую, если Δx мало, можно с достаточной точностью отнести к точке M. Отсюда

[1] Потенциал — локальная характеристика поля, но процедура его вычисления, связанная с суммированием элементарных работ на выбранной траектории, является интегральной.

$$E_x(M) \approx -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}.$$

Если устремить Δx к нулю, то вместо этого соотношения получим точное равенство

$$E_x(M) = -\varphi'_x(M), \qquad (2)$$

где $\varphi'_x(M)$ — производная потенциала по переменной x, взятая в точке M при условии, что y и z постоянны.

Аналогичные выражения можно получить и для других проекций поля, рассматривая малые перемещения пробного заряда вдоль y- и z- направлений:

$$E_y(M) = -\varphi'_y(M),\ E_z(M) = -\varphi'_z(M). \qquad (3)$$

Физически соотношения (2) и (3) совершенно понятны: чем больше составляющая поля $\boldsymbol{E}$ вдоль какой-нибудь из координатных осей, тем бо́льшая работа совершается полем при смещении пробного заряда q' вдоль данной оси. И поскольку работа эта производится за счёт уменьшения потенциальной энергии заряда q' в данном поле, то тем больше будет это уменьшение, т. е. тем быстрее спадает потенциал в выбранном направлении[1].

Зная проекции вектора $\boldsymbol{E}$ на оси координат, можно, конечно, построить и сам вектор. Покажем, что он будет направлен в сторону наиболее быстрого уменьшения потенциала.

Действительно, изменим ориентацию координатных осей в заданном поле. При этом, разумеется, изменятся и его проекции на эти оси. Можно выбрать одну из них, например x, и ориентировать её таким образом, чтобы проекция вектора $\boldsymbol{E}$ на неё приняла максимальное значение. Для этого, очевидно, нужно эту ось направить параллельно $\boldsymbol{E}$ (при этом проекция вектора равна его модулю). Но тогда, в соответствии с (2), и скорость убывания потенциала вдоль x будет наибольшей, т. е. потенциал спадает быстрее всего в направлении $\boldsymbol{E}$. А это и означает, что *вектор* $\boldsymbol{E}$ *направлен в сторону наибыстрейшего спадания потенциала*, причем «скорость» этого спадания

$$-\varphi'_{max} = E. \qquad (4)$$

Как явствует из вышеизложенного, введение потенциала значитель-

[1] Если домножить (2) и (3) на q', то получим связь между проекциями силы $\boldsymbol{F}$ и скоростью изменения потенциальной энергии U в соответствующих направлениях, справедливую, очевидно, для любого потенциального поля: $F_x = -U'_x$, $F_y = -U'_y$, $F_z = -U'_z$.

но облегчает расчёт поля, создаваемого заданным распределением зарядов: вместо векторной функции (5л9)[1], эквивалентной трём функциям-проекциям, достаточно найти одну скалярную функцию (12л10) и уже из неё по (2) и (3) найти поле.

Соотношения (2) и (3) кладут в основу определения единицы напряжённости поля. Она измеряется в вольтах, делённых на метр:

$$1\frac{\text{В}}{\text{м}}=\frac{1\text{В}}{1\text{м}}\cdot$$

$1\frac{\text{В}}{\text{м}}$ — это напряжённость такого однородного поля, в котором потенциал на расстоянии 1 м в направлении $\boldsymbol{E}$ падает на 1 В.

§ 8.11. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Одним из способов графического изображения полей является использование силовых линий. Силовой линией или линией поля $\boldsymbol{E}$ называется направленная линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{E}$ в той же точке. За направление силовой линии принимается направление $\boldsymbol{E}$. Очевидно, что через каждую точку поля M, где $E \neq 0$, можно провести только одну силовую линию. Для этого сместимся из M на произвольно малый отрезок Δl в направлении $\boldsymbol{E}$. Мы попадём в точку M' (рис. 2), где вектор поля $\boldsymbol{E}'$, вообще говоря, будет иметь несколько иную ориентацию (и величину, которая в данном случае несущественна). Сместимся теперь из M' на $\Delta l'$ в направлении $\boldsymbol{E}'$ и перейдём в точку M'', где напряжённость $\boldsymbol{E}''$ снова изменит ориентацию и т. д. В итоге получим ломаную, которая при беспредельном уменьшении длин её звеньев и увеличении их числа и перейдёт в силовую линию, проходящую через точку M (очевидно, линию эту можно продолжить и в другую сторону от M).

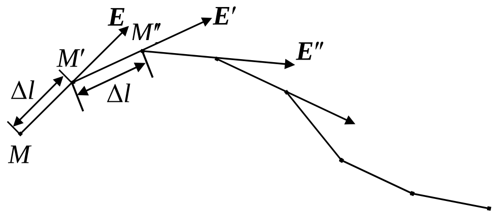


Рис. 2

При графическом изображении поля провести силовые линии через все его точки, конечно, невозможно. Поэтому их наносят семействами, располагая соседние линии на некотором расстоянии друг от друга. Что-

[1] Здесь и далее двойная нумерация формул будет использоваться при ссылке на предыдущие лекции. Первое число соответствует номеру формулы, второе (после буквы «л») — номеру лекции.

бы по семейству таких линий можно было судить не только о направлении, но и о величине поля, их проводят, по возможности, так, чтобы густота линий ν, т. е. их число, пересекающее перпендикулярную площадку единичной площади, была пропорциональна величине поля:

$$\nu \equiv \frac{\Delta N_{лин}}{\Delta S_{\perp}} \sim E\,, \tag{5}$$

где $\Delta N_{лин}$ — число линий, проходящих через перпендикулярную полю площадку, $\Delta S_{\perp}$ — её площадь, а E — средняя величина поля в некоторой области, которую пересекает достаточное для усреднения число силовых линий. Чем точнее мы хотим представить графически поле, тем гуще должны наносить семейство линий и тем меньше становится область, по которой усредняется поле E в (5).

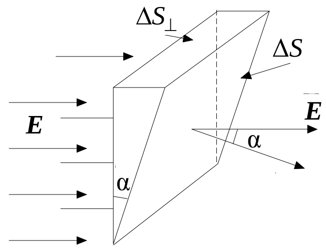


Рис. 3

Правило (5), связывающее густоту линий поля с его величиной, позволяет дать очень наглядную интерпретацию потока вектора $\boldsymbol{E}$, пронизывающего произвольную (ориентированную) поверхность. Рассмотрим малый её элемент ΔS (рис. 3) и спроектируем его на плоскость, перпендикулярную $\boldsymbol{E}$; получим площадку $\Delta S_{\perp}$. Очевидно, что площадки ΔS и $\Delta S_{\perp}$ пересекает одно и то же число линий поля $\boldsymbol{E}$, ибо все остальные грани изображённой на рис. 3 призмы параллельны $\boldsymbol{E}$ и ни одна из его линий пересечь их не может. Очевидно, число это

$$\Delta N_{лин} = \nu\,\Delta S_{\perp} = \nu\Delta S\cos\alpha \sim E\Delta S\cos\alpha = \Delta N, \tag{6}$$

где α — угол между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{n}$ (или же между ΔS и $\Delta S_{\perp}$), а ΔN — поток вектора $\boldsymbol{E}$ через площадку ΔS (а также через $\Delta S_{\perp}$). Поскольку поток — алгебраическая величина, знак которой зависит от произвольного выбора положительной нормали к поверхности $\boldsymbol{n}$, условимся и число линий $\Delta N_{лин}$, пересекающих данную ориентированную поверхность, считать положительным или отрицательным в зависимости от того, пересекают ли они эту поверхность в направлении положительной её нормали или навстречу ей.

Таким образом, число линий, пересекающих все элементы ΔS_i произвольной поверхности S, т. е. число линий, пронизывающих эту поверхность, оказывается пропорциональным потоку вектора $\boldsymbol{E}$ через неё. В частности, если поверхность S замкнута, то это число по теореме Гаусса определяется зарядом, находящимся внутри S, и пропорционально его величине. При этом количество линий, входящих внутрь поверхности, считается отрицательным, а количество выходящих из неё — положительным. Если рассматриваемая поверхность не содержит внутри себя зарядов, то число линий, пересекающих её, равно нулю. Иными словами, все входящие внутрь поверхности линии должны выйти из неё. Это означает, что в свободных от зарядов участках поля силовые линии не могут ни начинаться, ни кончаться[1].

Поскольку, с другой стороны, эти линии не могут быть замкнутыми (иначе работа поля $\boldsymbol{E}$ вдоль такой линии была бы отлична от нуля, что противоречит условию его потенциальности), то отсюда следует, что *линии электростатического поля либо начинаются и кончаются на зарядах, либо уходят в бесконечность*[2], причём только *одним своим концом* [3]. Очевидно, они должны начинаться на положительных зарядах и оканчиваться на отрицательных.

Используя рассмотренный способ изображения поля, следует иметь в виду, что, обладая высокой наглядностью, он не подчиняется принципу наложения, т. е. картина силовых линий определённой совокупности зарядов не может быть получена путём наложения соответствующих картин подсистем зарядов, образующих данную совокупность. Связано это, очевидно, с тем, что поля в каждой точке складываются векторно и силовые линии в окрестности этой точки должны, вообще говоря, изменить не только густоту, но и направление.

Замечание. При нанесении семейства силовых линий в соответствии с процедурой, описанной в начале параграфа, возникает вопрос: возможно ли, проводя линии, *всюду* удовлетворить правилу (5), связывающему густоту линий поля с его величиной? Ведь линии, нанесённые в какой-

---

[1] Исключением являются лишь точки, в которых $E = 0$ и направление силовых линий оказывается неопределённым. Рассмотрим, например, два одинаковых положительных точечных заряда q и точку O, расположенную точно посредине отрезка, соединяющего заряды. В этой точке, очевидно, $E = 0$. Однако в непосредственной близости от неё поле уже отлично от нуля и направлено к точке O, если удаляться от неё вдоль прямой q — q, и от O, если отходить в перпендикулярной этой прямой плоскости. Таким образом, в точке O оканчиваются две линии $\boldsymbol{E}$, подходящие к ней справа и слева, и начинается пучок линий, лежащих в перпендикулярной плоскости. Этот пример, являясь исключением из сформулированного в основном тексте утверждения, конечно же, не противоречит теореме Гаусса.

[2] Впрочем, это следует и из самой процедуры нанесения линий, описанной в начале параграфа: продолжая линию в обе стороны, мы обязательно либо уйдём «на бесконечность», либо «упрёмся» в заряд (за исключением, конечно, ситуаций, приведённых в предыдущей сноске).

[3] Используя условие потенциальности поля $\boldsymbol{E}$, нетрудно показать, что силовая линия (если все заряды сосредоточены в конечной области) не может обоими концами уходить в бесконечность.

либо области в соответствии с (5), продолжаясь, переходят в соседнюю область со *вполне определённой густотой*. Будет ли эта *новая* густота пропорциональна *новой* величине поля?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим область пространства, где есть поле, но нет зарядов (рис. 4). Выберем гауссову поверхность: на её «боках» $E_n = 0$ (т. е. поле касательно к боковой поверхности в каждой её точке), а на «основаниях» $|E_n| = E$ (т. е. они перпендикулярны полю). Очевидно, что оба основания пересекают одни и те же линии, так что

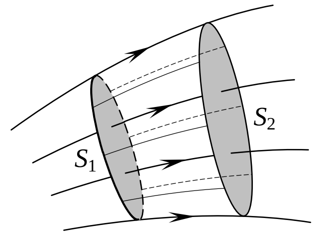


Рис. 4

$$\nu_1 S_1 = \nu_2 S_2,$$

где ν_1 и S_1 — соответственно густота и площадь, отнесённые к основанию 1, ν_2 и S_2 — то же для основания 2. Но из теоремы Гаусса следует, что

$$E_1 S_1 = E_2 S_2$$

(E_1 и E_2 — *величины* полей на основаниях 1 и 2), так что

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Таким образом, если в какой-либо области пространства мы провели семейство линий в соответствии с правилом (5), то, продолжая их в ту или иную сторону, мы *автоматически* удовлетворяем этому правилу везде[1]. Но зачем же тогда его формулировать как необходимое требование, если оно автоматически выполняется?

Оно, действительно, оказывается ненужным, если изображается поле, созданное совокупностью *одинаковых по величине* точечных зарядов, причём все они присутствуют на рисунке: тогда от каждого источника проводим *одно и то же* количество линий и ни о какой густоте не заботимся. Но если величины зарядов не равны, то от каждого источника надо проводить *разное* количество линий. Именно в соответствии с правилом (5) это количество должно быть *пропорционально величине заряда*. Кроме того, если на рисунке *отсутствуют* источники изображаемого поля (хотя бы частично), то *начинать,* по крайней мере, ряд линий семейства приходится в свободных от зарядов участках пространства. В

[1] Приведённое доказательство оказывается справедливым, очевидно, по отношению к линиям любого поля, *поток которого через любую замкнутую поверхность равен нулю*.

этом случае также работает правило (5), ибо позволяет правильно выбрать расстояния между соседними линиями[1].

Наряду с силовыми линиями для графического изображения полей применяют часто способ эквипотенциалей. Эквипотенциалью или эквипотенциальной поверхностью называется поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Например, поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью. Действительно, если соединить две произвольные её точки кривой, целиком проходящей внутри проводника, то работа поля вдоль этой кривой должна быть равна нулю, ибо в каждой её точке вектор $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$. Но если работа поля между двумя точками равна нулю, то по определению разности потенциалов потенциалы этих точек равны между собой.

Из определения эквипотенциальной поверхности следует, что она в каждой точке перпендикулярна вектору $\boldsymbol{E}$: если бы это было не так и имелась бы касательная составляющая поля $\boldsymbol{E}_\tau$, то работа поля вдоль этой составляющей отличалась бы от нуля и поверхность не была бы эквипотенциальной. Это обстоятельство позволяет графически переходить от семейства силовых линий к семейству эквипотенциалей и наоборот (рис. 5). Чтобы по семейству эквипотенциалей можно было судить о величине поля, их чертят обычно через равные $\Delta\varphi$. Тогда в местах, где E больше, эквипотенциали располагаются гуще. Действительно, чем больше величина поля в какой-либо области пространства, тем быстрее спадает, в соответствии с (4), потенциал вдоль направления $\boldsymbol{E}$ в этой области и тем на меньшее расстояние нужно отойти по полю от выбранной эквипотенциали, чтобы потенциал упал на заданную величину $\Delta\varphi$ (не забывайте, что потенциал вдоль поля падает, а не растёт!).

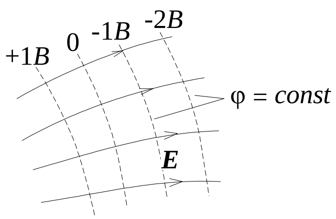


Рис. 5

[1] Кроме того, оно оказывается совершенно незаменимым при изображении полей, не имеющих источников (например, магнитного).

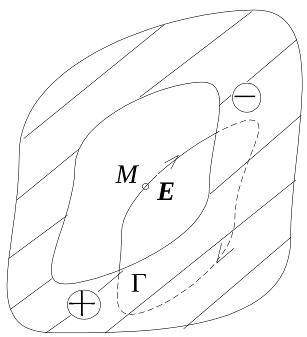


Рис. 6

Рассмотрим теперь важный пример, относящийся к определению поля внутри полости проводника. Покажем, что внутри такой полости, если в ней нет зарядов, не может возникнуть электростатического поля.

Предположим противное, т. е. допустим, что в какой-то точке M в полости проводника существует отличное от нуля поле $\boldsymbol{E}$. Проведём через эту точку силовую линию (рис. 6). Поскольку зарядов в полости нет, эта линия не может оборваться внутри неё, а должна обязательно «упереться» концами в стенки полости (на которых расположатся заряды).

Соединим концы линии кривой, целиком проходящей внутри проводника. При этом образуется замкнутый контур Г, циркуляция поля $\boldsymbol{E}$ по которому отлична от нуля (её часть вдоль силовой линии положительна, а внутри проводника — равна нулю). Полученное противоречие и доказывает наше утверждение[1].

§ 8.12. Основная задача электростатики

Основная задача электростатики разбивается на прямую и обратную и в простейшей форме выглядит так: даны величины и расположение зарядов q_i, найти поле $\boldsymbol{E}$ этих зарядов (прямая задача); дано поле $\boldsymbol{E}$, найти положения и величины его источников (обратная задача).

И рецепт, и формулы для решения этих задач нам уже известны. Действительно, зная расположение зарядов q_i, по формуле (12л10) можно найти распределение потенциала, а из него по формулам (2) и (3) вычислить составляющие поля. Обратно, если известно везде поле $\boldsymbol{E}$, то, окружая произвольную точку гауссовой поверхностью и вычисляя поток через неё, можно по теореме Гаусса найти заряд, находящийся внутри. При этом и прямая, и обратная задачи имеют единственное решение (соответствующее заданным условиям) ввиду того, что формулы, его определяющие, по своему смыслу являются однозначными.

Однако на практике заряды, возбуждающие поле, почти всегда располагаются на проводниках, причём распределение их в пределах каждо-

[1] В приведённом доказательстве не учтены две возможности, которые, однако, не нарушают его справедливости. Во-первых, линия в полости может закончиться, не дойдя до стенки, в точке неопределённости поля, где $E = 0$. Однако (если линия входит в эту точку) обязательно найдётся другая линия, выходящая из неё (иначе поток $\boldsymbol{E}$ через поверхность, окружающую эту точку, был бы отличным от нуля, хотя в ней нет заряда). Работа поля вдоль такой «составной» линии остаётся по-прежнему положительной на каждом её участке, и приведённые выше рассуждения остаются в силе. Во-вторых, для незамкнутых линий существует ещё одна возможность: линия $\boldsymbol{E}$, непрерывно извиваясь, может бесконечно продолжаться, оставаясь всё время внутри полости. Поскольку линия эта не имеет «толщины», она никогда не заполнит полость и не пересечёт её стенок. Однако существование такой линии тоже противоречит условию потенциальности поля (подумайте, почему) и в электростатическом поле невозможно.

го проводника оказывается уже неизвестным. Поэтому, считая приведённую выше формулировку основной задачи тривиальной, не представляющей практического интереса, мы под основной задачей электростатики будем понимать следующую: *даны расположение и форма находящихся в поле проводников; найти поле* ***E*** *этих проводников и распределение зарядов на их поверхностях, если известны либо потенциалы* (задача *A*), *либо заряды* (задача *B*) *каждого проводника*[1].

Поскольку распределение зарядов на каждом проводнике не известно и зависит оно не только от геометрии и заряда самого проводника, но и от положения, геометрии и зарядов остальных проводников (электростатическая индукция!), при решении задачи в такой постановке возникают значительные математические трудности. Наряду с основным вопросом, как решать задачу, встают и другие. Всегда ли задача имеет решение? Единственно ли оно?

§ 8.13. Полная система уравнений электростатики

Решение поставленной задачи может быть облегчено, если использовать два уравнения, которые были получены нами как следствия закона Кулона и принципа суперпозиции. Это теорема Гаусса и условие потенциальности поля:

$$\begin{cases} \sum\limits_{S} E_{ni}\Delta S_i = \dfrac{q}{\varepsilon_0}, \\ \sum\limits_{\Gamma} E_{li}\Delta l_i = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

справедливые соответственно для любой замкнутой поверхности *S* и любого замкнутого контура Г. Объединённые в пару, они представляют собой полную систему уравнений электростатики. Это значит, что любое электростатическое поле обязано удовлетворять этим уравнениям и обратно, если какое-либо поле удовлетворяет им, то оно электростатическое, т. е. может быть создано определённым образом распределёнными зарядами. Действительно, можно показать, что из системы (7) вытекают закон Кулона и принцип суперпозиции, т. е. эти пары утверждений полностью эквивалентны друг другу. Поскольку полнота в указанном смысле закона Кулона и принципа суперпозиции очевидна, отсюда следует и полнота системы (7).

Таким образом, основную задачу можно решать, пытаясь всюду

[1] Обратная задача здесь совпадает с обратной задачей в её простейшей форме.

удовлетворить уравнениям (7)[1]. Однако при этом она остаётся математически чрезвычайно сложной. Достаточно сказать, что общих аналитических методов её решения для произвольной системы проводников не существует. Единственный общий способ решения — численный.

Система (7) может оказаться ещё полезной тем, что позволяет в ряде случаев особой симметрии поля угадать решение задачи или, если предполагаемое решение найдено из других соображений, проверить его правильность. Если решение удовлетворяет этим уравнениям в любой области пространства, то оно верно.

И наконец, бесспорная ценность уравнений (7) состоит в том, что их анализ (вернее дифференциальной их модификации) позволяет доказать в произвольном случае существование решения[2] и его единственность. Это является содержанием так называемой теоремы единственности: *основная задача электростатики типа А или В всегда имеет решение, причём это решение единственно***.** Мы докажем эту теорему для частного случая уединённого проводника.

§ 8.14. Теорема единственности

Рассмотрим уединённый проводник и поместим на него произвольный заряд q. Докажем, что этот заряд разместится по поверхности проводника единственным способом. Предположим противное: пусть существуют два распределения $\sigma_1(M)$ и $\sigma_2(M)$, соответствующие q и не равные тождественно друг другу. Поскольку каждое из этих распределений дает внутри проводника нулевое поле, такое же поле дадут (порознь) и распределения $-\sigma_1(M)$ и $-\sigma_2(M)$, соответствующие, очевидно, заряду $-q$. Действительно, поле в каждой точке внутри складывается из полей всех поверхностных зарядов и оказывается равным нулю. Если изменить знаки всех зарядов на противоположные, то поле каждого заряда, сохраняясь по величине, тоже изменит направление на обратное, так что суммарное поле останется нулевым.

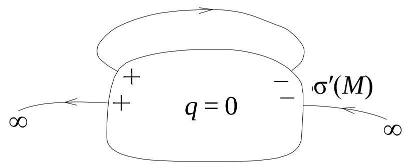


Рис. 7

[1] Эти уравнения могут быть приведены к дифференциальной форме, связывающей характеристики поля и заряда, относящиеся к одной и той же точке пространства.

[2] Речь идет о математическом доказательстве существования решения. Ведь исходя из физических соображений это существование очевидно: если данную систему проводников зарядить произвольными зарядами, то какое-то поле при этом обязательно возникнет. Это и значит, что решение существует.

Реализуем теперь на нашем проводнике одновременно распределения $\sigma_1(M)$ и $-\sigma_2(M)$. Получим некоторое новое распределение (рис. 7)

$$\sigma'(M) = \sigma_1(M) - \sigma_2(M) \neq 0.$$

Это распределение не создаёт внутри проводника поля (ибо не создают его порознь σ_1 и $-\sigma_2$). Таким образом, на поверхности незаряженного проводника (σ_1 и $-\sigma_2$ соответствуют зарядам $+q$ и $-q$) оказывается распределение заряда $\sigma'(M)$, не равное тождественно нулю. Это значит, что одни её участки становятся заряженными положительно, а другие — отрицательно и снаружи проводника появляется электрическое поле (рис. 7). Так как проводник уединён, то силовые линии этого поля, начинаясь на положительных зарядах, обязательно вернутся на поверхность к её отрицательным зарядам (пусть даже «через бесконечность») и поверхность эта окажется не эквипотенциальной (ибо работа поля вдоль линии не равна нулю). Отсюда следует, что $\sigma'(M) \equiv 0$, т. е. заряд распределяется на проводнике единственным образом.

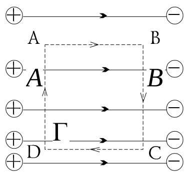
Если задан не заряд, а потенциал проводника, то задача сводится к только что рассмотренной: потенциал уединённого проводника, как мы увидим в следующей лекции, всегда пропорционален его заряду:

$$\varphi = \frac{1}{C} q ,$$

где C — коэффициент, зависящий от геометрии проводника и называемый его электроёмкостью.

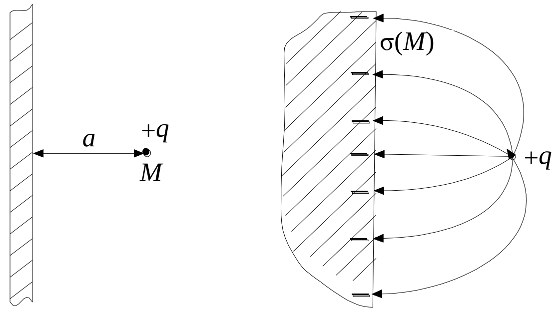
Доказанная единственность распределения заряда по поверхности проводника влечёт за собой, очевидно, и единственность распределения потенциала и поля в пространстве.

Замечание. Может показаться, что в приведённом доказательстве не используются уравнения системы (7). Однако это впечатление ошибочно: доказательство опирается на них неявно. В самом деле, в рассуждениях весьма существенной оказывается эквипотенциальность поверхности проводника, являющаяся, очевидно, следствием потенциальности электростатического поля вообще. А эта потенциальность как раз и выражается вторым уравнением системы (7). Что же касается первого её уравнения, то оно нужно для доказательства единственности распределения поля в пространстве. В частности, выражение (6л10) для E_n вблизи поверхности проводника является непосредственным следствием этого уравнения. Впрочем, единственность распределения поля следует, конечно, и из закона Кулона.



D Рис. 8 *C*

Пример 1. Можно ли создать электростатическое поле, изображённое на рис. 8 (например, *неравномерно* распределив разноимённые заряды на двух параллельных плоскостях)?



а б

Рис. 9

Нет, существование такого поля невозможно, ибо оно непотенциально, т. е. противоречит второму уравнению (7). Для доказательства этого выберем замкнутый контур Г, две стороны которого AB и CD параллельны полю, а две другие перпендикулярны ему. Очевидно, циркуляция $\boldsymbol{E}$ вдоль Г не равна нулю: на участке AB поле маленькое (силовые линии здесь идут редко), а на участке CD такой же длины — большое. Стало быть, вклады в циркуляцию этих участков хотя и окажутся противоположных знаков, но будут не равными по величине и взаимно уничтожиться не могут (участки BC и DA, очевидно, вклада в циркуляцию вообще не дадут).

Пример 2. Найти силу взаимодействия $\boldsymbol{F}$ бесконечной проводящей пластины и точечного заряда $+q$, расположенного на расстоянии a от неё (рис. 9, а).

Заполним сначала всё левое полупространство проводником (рис. 9, б) и найдём с ним силу взаимодействия $\boldsymbol{F}'$ заряда q. На плоской границе проводника заряд q индуцирует заряды противоположного знака (одноименные с ним заряды проводника уйдут «на бесконечность»), и на ней установится какое-то *неравномерное* распределение $\sigma(M)$. В поле $\boldsymbol{E}$ этих индуцированных зарядов и будет находиться заряд q, испытывая, очевидно, действие силы $\boldsymbol{F}' = q\boldsymbol{E}$. Для отыскания поля $\boldsymbol{E}$ (оно, конечно, будет неоднородным) обратимся к левому полупространству. Поскольку всё оно заполнено проводником, поле в любой его точке равно нулю. Но по принципу суперпозиции это поле складывается из полей заряда q и поверхностных зарядов $\sigma(M)$. Значит, поле индуцированных зарядов (в левом полупространстве) равно по величине и противоположно по направлению в каждой точке полю заряда q (рис. 10, а).

Рассмотрим теперь отдельно поле зарядов σ. Для этого «приклеим» их к поверхности и уберём заряд q. Оба полупространства оказываются абсолютно равноправными относительно расположенных на плоскости зарядов, а потому поля в них должны быть симметричны (рис. 10, б). Стало быть, если поле слева совпадает с полем заряда $-q$, расположенного в точке M, то поле справа должно совпадать с полем такого же заряда, но помещённого в симметричную относительно плоскости точку. Это поле справа и есть как раз то поле $\boldsymbol{E}$, которое «чувствует» заряд $+q$: оно тождественно полю заряда $-q$, являющегося зеркальным изображением плоскостью заряда $+q$ (рис. 11). Таким образом, искомая сила $\boldsymbol{F}'$ равна силе взаимодействия зарядов $+q$ и $-q$, помещённых на расстоянии $2a$ друг от друга, т. е. по величине

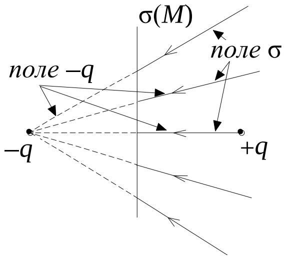


Рис. 11

$$F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2},$$

перпендикулярна плоскости и является силой притяжения.

Устраним теперь проводник, заполняющий левое полупространство, оставив лишь тонкую проводящую бесконечную перепонку (рис. 12). Появится ещё одна поверхность (левая), на которой, вообще говоря, может возникнуть некое распределение σ′(M) и всё «испортить». Однако этого не произойдёт, и здесь на помощь нам приходит полная система уравнений (7) и теорема единственности[1]. В самом деле, если *предположить*, что σ′(M) ≡ 0, то поле внутри перепонки будет равно нулю: ведь система зарядов {$+q$, σ(M)} даёт нулевое поле *везде* левее заряженной поверхности σ(M). Поскольку при таком распределении поле в правом полупространстве совпадает с полем двух точечных зарядов и, конечно, удовлетворяет системе (7), а в левом — оно тождественно равно нулю и, очевидно, тоже ей удовлетворяет, найденное распределение заряда является верным и единственным. Стало быть, никакое другое распреде-

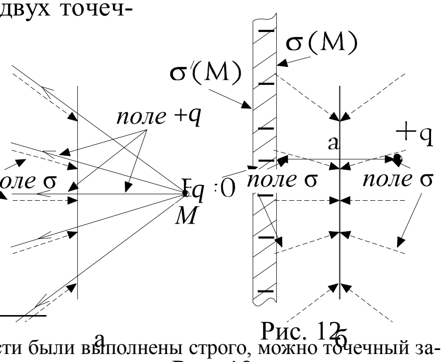


Рис. 12

Рис. 10

[1] Чтобы условия теоремы единственности были выполнены строго, можно точечный заряд считать маленьким проводящим шариком.

ление не подойдёт и $\sigma'(M)$ действительно везде равно нулю. Не изменится и сила взаимодействия заряда и плоскости. Отсюда следует также, что левая поверхность перепонки может быть произвольной (не обязательно плоской): на ней всё равно заряда не появится.

Контрольные вопросы и задания

1. Считая распределение потенциала в пространстве известным, найти поле $\boldsymbol{E}$ в данной точке.
2. Показать, что вектор $\boldsymbol{E}$ направлен в сторону наиболее быстрого спадания потенциала.
3. Что называется силовой линией? Какому правилу следуют при нанесении семейства линий?
4. Могут ли линии пересекаться? Касаться?
5. Показать, что число линий, пронизывающих любую ориентированную поверхность, пропорционально потоку вектора $\boldsymbol{E}$ через неё.
6. Показать, что в свободных от зарядов участках поля силовые линии не могут ни начинаться, ни кончаться.
7. Что такое эквипотенциальная поверхность? Как от семейства силовых линий перейти к семейству эквипотенциалей?
8. Показать, что если в проводнике имеется полость и в ней нет зарядов, то в этой полости не может возникнуть электрическое поле.
9. Сформулировать прямую и обратную задачи электростатики в тривиальной форме. Привести алгоритмы их решения.
10. Сформулировать основную задачу электростатики типов A и B (в нетривиальной форме).
11. Привести полную систему уравнений электростатики. Что означает её полнота?
12. Сформулировать и доказать для уединённого проводника теорему единственности.
13. Найти силу взаимодействия точечного заряда с бесконечной плоской проводящей пластиной постоянной толщины. Какие по знаку и величине заряды индуцируются на каждой из сторон пластины?
14. Как изменится ответ на предыдущий вопрос, если тыльная сторона пластины не будет плоской?