|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯГосударственное бюджетное образовательное учреждениедополнительного образования детей«ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДЕТЕЙ»350000 г. Краснодар,ул. Красная, 76тел. 259-84-01E-mail: cdodd@mail.ru |  | **Всероссийская олимпиада школьников** **по математике****2014-2015 учебный год****Муниципальный этап****10 класс, ответы****Председатель предметно-методической комиссии: Бирюк А.Э., д.ф.-м.н., доцент** |

**ОТВЕТ к задаче № 1**

Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}\left|x\right|+y+z=2010,\\x+\left|y\right|+z=2012\\x+y+\left|z\right|=2014.\end{array}\right.,$$

**Решение.** Заметим, что y отрицательно, ибо если $y\geq 0$ получаем:

2010 = $\left|x\right|+y+z\geq $ $x+\left|y\right|+z=2012.$

Аналогично замечаем, что z также отрицательно. Тогда, раскрыв модули и сложив последние два уравнения, находим, что x = 2013. Теперь, например, сложив первые два уравнения получим, что z = -2. Следовательно, y = -1.

**Ответ:** x = 2013, y = -1, z= -2.

**ОТВЕТ к задаче № 2**

Петя на перемене перемножил все натуральные числа от 1 до 16 включительно и записал ответ на доске, но кто-то стёр 5 цифр, заменив каждую стёртую цифру на «\*». В результате на доске оказалось записано:

2092278\*88\*\*\*\*.

Восстановите стертые цифры. Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** Разложим 15=3·5 и выделим множители 4,5,5 и 10, записав исходное число в виде:

$$(2⋅3⋅6⋅7⋅9⋅8⋅11⋅12⋅13⋅14⋅16⋅3)⋅(4⋅5⋅5⋅10)$$

Второй множитель равен 1000, значит, последние три звёздочки это три нуля. Анализируя последнюю цифру первого множителя, найдём, что она равна 8. Оставшуюся цифру найдём из того, что исходное число делится на 11. Тут нам поможет наблюдение, что числа 209 и 22 делятся на 11, Значит мы должны найти цифру в числе 78\*888 исходя из того, что оно делится на 11. Применив признак делимости на 11, найдём, что эта цифра равна 9.

**Ответ** 9;8000. 2092278**9**88**8000**.

**Замечание.** Если воспользовались не признаком делимости на 11, а признаком делимости на 9, то считать, что цифра «9» не найдена, т.к. такой подход не может «отличить» цифру нуль от цифры девять.

**Критерии:** Обоснованно найдены три нуля: 1 балл.

Обоснованно найдена цифра 8: 3 балла.

Обоснованно найдена цифра 9: 3 балла.

Любые необоснованные «угадывания» оценивать нулём баллов. Однако, ответ можно получить и прямым перемножением «в столбик»; в этом случае вычисления должны присутствовать.

**ОТВЕТ к задаче № 3**

К десятичной записи числа $5^{2014}$ справа дописали десятичную запись числа $2^{2014}$. Сколько цифр содержит получившееся число? Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** Пусть число $a=2^{2014}$ является *m* значным, а число $b=5^{2014}$ является *n* значным. Это означает, что $10^{m-1}\leq a<10^{m}$ и $10^{n-1}\leq b<10^{n}$.

Поскольку степень десятки не может быть равна ни степени двойки ни степени пятёрки, то указанные неравенства являются строгими:

$10^{m-1}<2^{2014}<10^{m}$ и $10^{n-1}<5^{2014}<10^{n}$

Перемножив их, мы получаем, что $10^{m+n-2}<10^{2014}<10^{m+n}$. Это означает, что $m+n=2015.$

**Ответ**: 2015.

**ОТВЕТ к задаче № 4**

Окружность, проходящая через вершины A и C остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках C1 и A1 соответственно. Точка F — центр описанной окружности треугольника А1BC1 . Докажите, что BF ⊥ AC.



**Решение.** Пусть ∠BAC=α. Тогда ∠BA1C1=α , т.к. каждый из них дополняет ∠C1A1C до 180°. Опустим перпендикуляр FG на отрезок BC1 . Вписанный угол ∠BA1C1 равен половине своего центрального угла т.е. равен углу ∠BFG. Получили, что ∠BFG=α, следовательно, ∠FBG=90° − α. Таким образом углы ∠BAC и ∠FBА дополняют друг друга до 90° т.е. прямые BF и AC перпендикулярны.

**ОТВЕТ к задаче № 5**

Каждая из расположенных по кругу 2014 ламп может находиться ровно в одном из двух состояний: гореть или не гореть. Вначале горит только одна лампа. За один ход можно выбрать любую группу из 19 расположенных подряд ламп и у каждой из них поменять состояние на противоположное. Можно ли с помощью таких ходов добиться того, чтобы горели все 2014 ламп? Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** Занумеруем все лампы, начиная с горящей, по часовой стрелке числами 1,2,3,…, 19 в циклическом порядке. Ламп каждого номера ровно 2014/19 = 106 – чётное число. Каждый ход изменяет состояние ровно одной лампы каждого номера. Чтобы горевшая лампа осталась в итоге гореть, её состояние надо изменить чётное число раз, а чтобы не горевшая зажглась – нечётное число раз. Следовательно, чтобы горели все лампы с номером один, нужно нечётное число ходов, а чтобы горели все лампы с номером два, нужно чётное число ходов, что невозможно, так как число ходов не может быть одновременно и чётным и нечётным.

**Ответ**. Нельзя.