Государственное бюджетное
образовательное учреждение
дополнительного образования детей
«Центр дополнительного образования для детей»
350000 г. Краснодар,
ул. Красная, 76
тел.259-79-40, 259-84-01
E-mail:cdodd@mail.ru
12.12.2014 № 01.21.-557
на №_____ от _____

Руководителю муниципального органа управления образованием

Руководителю территориальной методической службы

О проведении апелляции зонального этапа региональной (краевой) олимпиады школьников по математике для учащихся 5-8-х классов в 2014-2015 учебном году

Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центр дополнительного образования для детей» **и н ф о р м и р у е т** Вас о том, что **апелляция** зонального этапа региональной (краевой) олимпиады школьников по математике для учащихся 5-8-х классов пройдет **21** декабря 2014 года в **11.00** по адресу: г. Краснодар, ул. Ставропольская 149, Кубанский государственный университет, ауд. **307-Н** (вход со стороны Интернет-центра). С собой иметь удостоверение личности (паспорт или ученический билет).

Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центр дополнительного образования для детей» **и н ф о р м и р у е т** Вас о том, что итоги зонального этапа региональной (краевой) олимпиады школьников по математике для учащихся 5-8-х классов будут выставлены на сайте www.cdodd.ru в разделе объявления в среду **14** декабря 2014 года, а так же высылаем Вам:

– решения и критерии оценивания заданий для всех параллелей для ознакомления;

– форму заявления для апелляции.

Директор ГБОУДОД «Центр
дополнительного образования для детей» О.В. Климченко

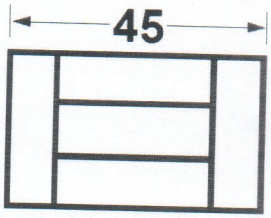
Анна Николаевна Бойко
8-965-471-95-71

Предварительная версия

(публикуется для подготовки к апелляции)

5 класс

1. Из пяти одинаковых прямоугольников составили, как показано на рисунке, один большой прямоугольник, длина которого оказалась равна 45 см. Найдите площадь маленького прямоугольника в квадратных сантиметрах.



Ответ: 9x15=135.

2. Три одинаковых насоса за три часа накачивают три тонны воды. Сколько тонн воды накачают девять таких насосов за девять часов?

Ответ: 27.

Решение. Три насоса за девять часов накачают девять тонн, а девять насосов в три раза больше, т.е. 27 тонн.

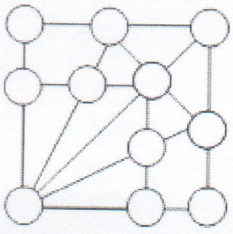
3. У Гарри Поттера на кухне кипит волшебное зелье, в которое он должен опустить ровно на 11 минут волшебную палочку для подзарядки. Если подзарядка будет длиться больше или меньше чем 11 минут, то палочка может испортиться. У него есть только двое песочных часов: первые на 3 минуты, а вторые на 7 минут. Опишите, как Гарри может подзарядить волшебную палочку в волшебном зелье и не испортить ее, пользуясь только этими часами.

Решение: Перевернуть обои часы. Когда пройдёт 3 минуты в семиминутных часах останется 4 минуты. Начать кипятить волшебную палочку в этот момент Когда 4 минуты закончатся, перевернуть семиминутные часы обратно: 4 + 7 = 11 мин.

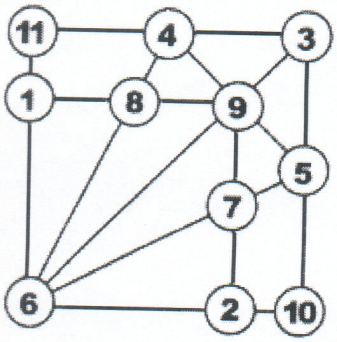
4. На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B — 75 км, между A и C — 50 км, между C и D — 40 км, между D и A — 60 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). Найдите расстояние между B и C.

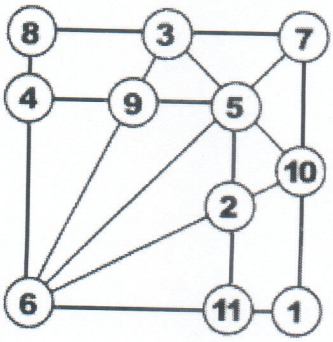
Решение. Рассмотрев точки A,C,D можно сделать вывод что длина кольцевой дороги равна 150. Поэтому точка B, находится «напротив» точки A, следовательно расстояние между B и C составляет 25 км.

5. Можно ли в кружках записать числа от 1 до 11 так, что бы сумма трех чисел на каждом из десяти отрезков была одна и та же.



Решение. Можно, например



или


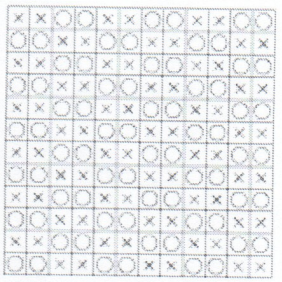
6 класс.

1. Дед Мороз, Санта-Клаус и Снежная Королева в новогоднюю ночь работали над производством снега. Дед Мороз произвел 200 кг снега. Санта-Клаус произвел столько сколько Дед Мороз и еще половину от того, что произвела Снежная Королева. А Снежная Королева произвела ровно половину всего произведенного снега за всю новогоднюю ночь. Сколько килограммов снега произвел каждый?

Ответ. Дед Мороз: 200, Санта-Клаус: 600, Снежная Королева: 800.
Решение. Снежная Королева произвела половину, следовательно, Санта-Клаус произвел четверть и еще 200 кг. Но Дед Мороз и Санта-Клаус вместе произвели половину всего снега. Следовательно, 200+200=400 (кг) составляют четверть всего дневного производства. Значит Санта-Клаус произвёл 200+400=600 (кг), а Снежная Королева: 800 кг.

2. Можно ли на тетрадном листе клетчатой бумаги расставить крестики и нолики (один знак в одной клетке) так, чтобы ни на одной горизонтали, ни на одной вертикали, а также ни на одной диагонали нельзя было бы встретить подряд три одинаковых знака?

Решение. Да, можно, например, так:



3. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в восьмом подъезде в квартире №468, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому Саши, Петя обнаружил, что дом двенадцатиэтажный. На каком этаже живёт Саша? Известно, что в подъездах одинаковое количество этажей и одинаковое количество квартир, кроме этого, в каждом подъезде одинаковое количество квартир на этажах. Номера квартир в доме начинаются с единицы.

Решение. Заметим, что в подъезде не может быть больше чем 66 квартир. В самом деле, если число квартир в подъезде 67 или больше, то в первых семи подъездах будет не менее чем 67·7= 469 квартир, а тогда квартира №468 не может быть в восьмом

подъезде. Аналогично, если в одном подъезде 58 или меньше квартир, то в первых восьми подъездах будет не более чем 58·8= 464 квартир, а тогда квартира №468 не может быть в восьмом подъезде. Значит количество квартир в одном подъезде может быть от 59 до 66. Поскольку дом двенадцатиэтажный, то это число должно быть кратно 12. Значит в подъезде 60 квартир, а на одном этаже одного подъезда по 5 квартир. В первых семи подъездах будет 60·7= 420 квартир, на этаже k восьмого подъезда находятся квартиры 421+5(k-1) до 420+5k. Квартира №468 попадает в этот промежуток при k=10.

Ответ: на десятом этаже.

4. Ковёр-самолёт, приземлившись на Поле Чудес, начал изменяться в размерах и форме, но не выходя за пределы неменяющегося Поля Чудес. Площадь ковра постоянно увеличивалась, а за каждые сутки она удваивалась. Ровно через 50 суток Ковёр-самолёт наконец полностью покрыл всё Поле Чудес, после чего перестал меняться. Определите, за сколько суток заполнят всё Поле Чудес два таких ковра-самолета, приземлившись на Поле Чудес одновременно, если в процессе изменения своих форм и размеров они не могут накладываться друг на друга.

Решение. Приземление двух таких ковров-самолётов равносильно «выросту одного» за сутки. Поэтому два ковра самолёта заполнят всё поле за 49 суток.

5. Шерлоку Холмсу сообщили, что число бандитов в городе является четырехзначным, произведение цифр которого больше 40, но меньше 50. Кроме того, это четырехзначное число еще и кратно 12. Миссис Хадсон встряла в разговор и возразила, что таких чисел может быть несколько или не быть вообще. Так сколько же на самом деле существует таких чисел? Обоснуйте свой ответ.

Решение. Поскольку число чётное, то последняя цифра четна, значит произведение цифр должно быть чётным числом, т.е. это может быть 42,44,46 или 48. Но 44 делится на простое число 11, а 46 делится на простое число 23 (таких цифр не бывает), значит, произведение цифр может быть 42 или 48. Рассмотрим эти случаи отдельно.

42=6·7·1·1=2·3·7·1. Набор цифр 2,3,7,1, не подходит, т.к. сумма цифр должна быть кратна трём (число бандитов делится на 12, а значит и на 3). В наборе 6,7,1,1 цифра 6 должна быть на последнем месте. Заметим, что все варианты 1176, 1716, 7116 — подходят.

48=6·8·1·1=6·4·2·1=6·2·2·2=3·8·2·1=3·4·4·1=3·4·2·2. Сумма цифр должна делиться на 3, этому условию удовлетворяют только наборы 6,2,2,2 и 3,4,4,1. Но из набора 6,2,2,2 нельзя составить числа кратного 4, а из набора 3,4,4,1 можно составить два таких числа. 1344 и 3144.

Ответ: пять чисел (1176, 1716, 7116, 1344 и 3144)

7 класс.

1. Можно ли к числу 2014 приписать справа две цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось нацело на 101? Если да, то какие?

Решение. Пусть искомое число $\overline{2014ab}$. Заметим, что число 1919=19·101 делится на 101, а 2014=1919+95, поэтому число $\overline{95ab} = \overline{2014ab} - 191900$ должно делиться на 101, поэтому $\overline{ab}$=95.

Ответ. Да, можно приписать 95.

2. У Лисы Алисы в мешке лежит 201 монета, из них ровно 7 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые монеты тоже весят одинаково, при этом известно, что фальшивая монета легче настоящей. Возможно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определить 25 настоящих монет?

Решение. Да, можно. Отложим одну монету, остальные каждый раз будем делить пополам и выбирать более тяжелую половину (или произвольную, если они равны по весу). Тогда после первого взвешивания мы отберем 100 монет, среди которых не более трёх фальшивых, после второго 50 монет, среди которых не более одной фальшивой, а после третьего 25 настоящих монет.

3. Сколько острых углов может иметь выпуклый восьмиугольник? Укажите все варианты ответа и покажите, что других нет.

Ответ: 3,2,1 или 0.

4. Какое наименьшее количество плоских разрезов (разрезов плоскостью) необходимо сделать, чтобы разрезать куб на 64 одинаковых маленьких кубика? После каждого разреза разрешается перекладывать образовавшиеся части в любое место. Обоснуйте свой ответ.

Решение. Заметим, что 64=4x4x4. Каждым разрезом плоскости мы можем разрезать каждую уже имеющуюся часть пополам. За два разреза плоскостью мы можем получить 4 «слоя» 4x4x1, а повторив аналогичные действия в двух других направлениях, мы получим 64 кубика 1x1x1 за шесть разрезов плоскостью. Покажем, что меньшим числом разрезов получить 64 кубика нельзя. Поскольку за каждый разрез количество частей не более чем удваивается, то если разрезов не более пяти, то частей будет не более 32.

Ответ: 6.

5. Даня опаздывая в кино, решил бегом подняться по эскалатору (лестница с движущимися ступенями), который и так ехал вверх. В момент, когда он ступил на эскалатор, Даня уронил билет, не заметив этого. Обнаружив пропажу, он сбежал вниз с удвоенной скоростью и через 10 секунд поднял билет, оказавшись в этот момент ровно посередине эскалатора. От бега Даня устал и остаток пути провёл стоя. Сколько времени провёл Даня на эскалаторе?

Решение. После обнаружения пропажи Даня приближался к билету в два раза быстрее, чем удалялся от него. Следовательно, время, которое прошло с момента потери учебника до его поднятия, равно 2*10+10=30 секунд.
За это время учебник доехал ровно до середины эскалатора, значит, преодоление оставшейся половины подъёма стоя займёт у Дани также 30 секунд. А общее время, проведённое на эскалаторе, составит 60 секунд=1минута.

8 класс.

1. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:
1) за 3 золотых монеты получить 4 серебряных и одну медную;
2) за 7 серебряных монет получить 4 золотых и одну медную.
У торговца были только серебряные монеты. После посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 42 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у торговца?

Ответ. 30

Решение. Если операций первого типа было x, то из баланса золотых монет, заключаем, что операций второго типа было $\frac{3}{4}x$. Из условия на медные, получаем, что $x + \frac{3}{4}x = 42$, откуда $7x = 4 \cdot 6 \cdot 7$, т.е. $x = 24$. Таким образом, операций первого типа было 24, а второго типа 18. Следовательно, серебряных монет уменьшилось на 30.

Крит. Если понял, что всего было 42 обмена и больше продвижений нет, то 1 балл.

Конкретный пример, последовательность торговли, дающая правильный ответ: 7 баллов. Вообще говоря, необходимо доказывать, что при любой другой последовательности торговли ответ будет тот же. Жюри приняло решение не снижать за это баллы.

Пример неполного решения. *Запишем равенства: 3зол.=4сер.+1медн. и/или 7сер.=4зол.+1медн. Умножим первое на 4, а второе на 3 и сложим. Получим 5сер=7медн. Следовательно, 42 медным соответствует 30 серебряных монет.* На самом деле, придание смысла указанным равенствам — весьма не очевидная задача (метод *инварианта*), которая далеко не всегда имеет решение. Из жизненного опыта мы знаем, что в обменных операциях «клиент» всегда теряет, в этом случае указанные равенства не имеют смысла. Это решение оценивается 5 баллов.

Если равенства *3зол.=4сер.+1медн. и/или 7сер.=4зол.+1медн.* используются как неудачное обозначение для соответствующих обменных операций — оценка не снижается.

2. В образовательном центре Бернулли обучается не менее 80 школьников. Они, по некоторому принципу, разбиты на несколько групп. Оказалось, что среди любых 35 учеников центра Бернулли найдутся восемь (или более) одногруппников. Докажите, что в одной из групп учится не менее девятнадцати школьников.

Указание. Упорядочить группы по убыванию и рассмотреть пятую по численности группу. В ней не может быть более 6 человек. (Иначе мы можем выбрать по 7 человек из первых пяти групп — и будет противоречие с условием).

Решение 1. Назовём группу большой, если в ней состоит 7 или более школьников, остальные группы назовём маленькими. Очевидно, что большие группы есть, иначе произвольный набор из 35 учеников противоречит условию. Пусть k — количество

больших групп. Тогда $k \leq 4$, иначе, возьмём пять больших групп, выберем по 7 школьников из каждой и получим набор из 35 учеников противоречащий условию. Суммарное количество учеников во всех маленьких группах не может превосходить $34-7k$ человек. Иначе, взяв в каждой большой группе по 7 школьников и произвольные $35-7k$ школьников из маленьких мы получим набор из 35 школьников, противоречащий условию. Тогда во всех больших группах учатся не менее, чем $80-(34-7k)=46+7k$ человек. Значит в одной из них учатся не менее, чем $\frac{46+7k}{k}=\frac{46}{k}+7 \geq \frac{46}{4}+7=18{,}5$; т.е. не менее, чем 19 школьников.

Решение 2. Предположим, что в каждой группе ≤ 18 школьников. Назовём группу большой, если в ней состоит 8 или более школьников. Ясно, что больших групп не более четырёх. Если их четыре, то во всех остальных группах будет не менее 8 школьников, и мы можем набрать 35 учеников: по 7 из каждой большой группы и еще произвольно 7 из всех оставшихся. Таким образом, мы показали, что больших групп не более трёх.

Теперь рассуждаем следующим образом. Без ограничения общности будем считать, что в Центре учится ровно 80 школьников. Возьмем произвольные 35 школьников (из 80-ти) выделим 8 одногруппников и «отставим их». Из остальных 72 опять возьмём произвольные 35 и опять выделим 8 одногруппников. Продолжая таким же образом, мы получим 6 наборов по 8 одногруппников и еще 32 школьника. Теперь по принципу Дирихле найдется группа в которой, по крайней мере, 16 человек. (Назовем ее группой А). Возьмем произвольных трех школьников из этих 16-ти и рассмотрим набор из 35 школьников, состоящий из остальных 32-х и выбранных троих из группы А. Там есть набор из 8 одногруппников. Если это одногруппники группы А, то в группе А уже будет уже по крайней мере 16-3+8=21 школьников, значит это новый набор из 8 одногруппников. Значит, мы нашли семь наборов из 8-ми одногруппников, а больших групп у нас **не** более трех, значит, есть группа в которой 24 или более школьников – противоречие.

Замеч. Если решаем задачу в предположении, что всего четыре группы — 0 баллов.

Если показано что нет разбивки на 5 групп: 18,18,18,18,8 (или эквивалентное «решение»)– ставим 1 балл. Этого совершенно не достаточно для решения. В случае, если в четвертой по численности группе (и/или других) меньше 7 человек – мы не сможем тривиальным способом набрать 35 школьников, обеспечивающие противоречие)

«Чистое» решение в предположении, что в четырех самых больших группах не менее 7 человек (в каждой): 3 балла. К сожалению, никто этого не сделал.

За идею «выделения» по 8 одногрупников несколько раз: 5 баллов.

3. В разностороннем треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $\angle ABC$ — острый, если известно, что $AC = 2 \cdot BD$.

Решение 1. Проведем высоту BH и медиану BM. Докажем лемму.

Лемма. Если AB≠BC, то биссектриса BD лежит между высотой BH и медианой BM.

Без ограничения общности будем считать, что AB<BC. Тогда пользуясь свойством, что против большей стороны лежит больший угол заключаем, что ∠A>∠C. Пользуясь теоремой о внешнем угле теперь легко заключить, что ∠BDA<∠BDC, значит ∠BDA — острый. Следовательно, точка H лежит на луче DA. Для завершения доказательства леммы осталось показать, что ∠CBM< ½∠B. Это равносильно неравенству ∠CBM<∠ABM. На продолжении прямой BM за точку M отметим точку F, т.ч. BM=BF. Тогда ΔABM=ΔCFM. В частности AB=CF<BC и ∠ABM=∠CFM. В треугольнике BCF имеем CF<BC, следовательно, ∠ABM=∠CFM<∠CBM. *Лемма доказана.*

Из леммы заключаем, что BM>BD (т.к. угол DBM — тупой). Следовательно, BM> ½ AC=AM=MC. Поэтому ∠ABM<∠BAM и ∠CBM<∠BCM. Сложив эти два неравенства, получаем, для углов треугольника ABC выполнено ∠B<∠A+∠C. Прибавив ∠B к каждой части последнего неравенства, получаем:
∠B+∠B<∠A+∠B+∠C=180°.

Замечание. Если показано, что угол B не может быть прямым: 2 балла.

Замечание. В решении 1, центральным моментом было доказательство того, что BM>BD. Приведем более простое доказательство этого факта но не «общем виде» а опираясь на данные задачи. Итак мы предположили, что AB<BC и вывели из этого, что ∠A>∠C. Пусть ∠B≥90°, тогда ∠C<45°, Из треугольника BDC заключаем, что CD>BD=CM, значит точка D лежит на отрезке AM. Поскольку угол BDM – тупой, то BD>DM.

4. Ковёр-самолёт прямоугольной формы приземлившись на прямоугольное Поле Чудес начал увеличивать свои размеры. Каждый час и длина и ширина увеличивались в одно и то же (дробное) число раз, так что за сутки (24 часа) каждая сторона удваивалась. Ковёр-самолёт полностью покрыл всё Поле Чудес ровно за 100 суток (и дальше перестал расти). Дополнительно известно, что в конце каждого часа ковёр может произвести чудесную трансформацию: изменить свою длину и свою ширину, сохранив свою площадь, после чего он продолжает увеличиваться в обычном режиме. Это волшебное свойство позволяет ему заполнить Поле даже в том случае, если отношение длины и ширины у ковра и у Поля были изначально различными. Определите, за сколько часов заполнят всё Поле Чудес два таких ковра-самолета, приземлившись на Поле Чудес одновременно, если в процессе изменения своих форм и размеров они не могут накладываться друг на друга и выходить за пределы Поля.

Решение. За 24 часа площадь учетверяется, следовательно, за 12 часов она удваивается, следовательно прилёт двух ковров самолетов эквивалентен пропуску первых 12 часов. Ответ 2400-12=2388.

Ответ 2388.

5. Покажите, что десятичная запись числа 3^{2014} содержит менее тысячи цифр.

Решение 1. Заметим, что $3^5 = 243 < 250 = \frac{10^3}{4}$. Возведя это в пятую степень, получим $3^{25} < \frac{10^{15}}{1024} < 10^{12}$.

Возведя неравенство $3^{25} < 10^{12}$ в восьмидесятую степень, получим $3^{2000} < 10^{960}$. Далее, поскольку $3^2 < 10$, то $3^{14} < 10^7$. Значит $3^{2014} < 10^{967}$. Число цифр десятичной записи числа 3^{2014} не превосходит 967, следовательно это число содержит меньше тысячи цифр.

Решение 2. Умножением в столбик можно проверить, что $9^5 = 59049$ т.е. $9^5 < 6 \cdot 10^4$. Далее, опять умножением в столбик, можно проверить, что $6^5 = 7776 < 10^4$. Это означает, что $9^{25} < 6^5 \cdot 10^{20} < 10^{24}$. Возведя, неравенство $9^{25} < 10^{24}$ в сороковую степень, мы получим $9^{1000} < 10^{960}$, домножив на неравенство $9^7 < 10^7$. Получаем, $9^{1007} < 10^{967}$.

Решение 3. Нужно показать неравенство $10^{999} > 9^{1007} = 9^{999} \cdot 9^8$ или, эквивалентно $\left(\frac{10}{9}\right)^{999} > 9^8$

Заметим, что $\frac{10}{9} > 1{,}1$. Значит, $\left(\frac{10}{9}\right)^2 > 1{,}21 > 1{,}2$. Значит, $\left(\frac{10}{9}\right)^4 > 1{,}44$, а $\left(\frac{10}{9}\right)^8 > 2$. Значит $\left(\frac{10}{9}\right)^{80} > 2^{10} > 10^3$. Следовательно, $\left(\frac{10}{9}\right)^{240} > 10^9 > 9^8$. Следовательно $\left(\frac{10}{9}\right)^{999} > \left(\frac{10}{9}\right)^{240} > 9^8$.

Замечание. Условие задачи эквивалентно неравенству $3^{2014} < 10^{999}$. Если заявляется, что нужно установить неравенство $3^{2014} < 10^{1000}$ — снимать 2 балла. Если заявляется, что нужно доказать неравенство $3^{2014} < 10^{999}$ и больше продвижений нет, ставить 1 балл.

Примечание. Десятичная запись числа 3^{2014} состоит из 961 цифры; $3^{2014} \approx 8{,}36 \times 10^{960}$.