|  |  |
| --- | --- |
| МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИКРАСНОДАРСКОГО КРАЯ**Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центрдополнительного** **образования для детей»**350000 г. Краснодар, ул. Красная, 76тел.259-84-01 E-mail:cdodd@mail.ru | **Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике*****2013-2014 учебный год******9 класс,******решения и методические указания****Председатель ПМК:* *Бирюк Андрей Эдуардович* |

**9.1.**Верно ли, что для каждого натурального числа *n* число $p\left(n\right)=n^{2}+n+41 $ является простым? Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** Утверждение неверно, т.к. например, при*n*=41 получаем $p\left(41\right)=41⋅43$ — составное число.

**Комментарий 1.** Если установлено, что *p*(41) делится на 41, и сразу сделан вывод, что оно составное, то снимать 1 балл. Необходимо проверить, что *p*(41) не равно 41. Это можно сделать, например, показав, что оно больше чем 41.

**Комментарий 2.**  Возможны другие правильные решения, например, можно подставить *n*=40. Интересно заметить, что все числа от *p*(1) до *p*(39) — простые.

**9.2.** Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных или остальных?

**Решение.** Заметим, что всего существует 900000 шестизначных чисел и 900 трехзначных чисел. Подсчитаем общее количество чисел, представимых в виде произведения двух трехзначных чисел. Имеетсяне более $\frac{900⋅899}{2}$ чисел, представимых в виде произведения двух различных трехзначных чисел, и еще 900, представимых в виде произведения двух одинаковых трехзначных чисел. Итого, получаем не более 405450 таких чисел. Шестизначных таких чисел будет еще меньше, т.е. меньше половины от всех шестизначных чисел.

**Ответ:** остальных больше.

**Комментарий.** Угаданный ответ без обоснования: 0 баллов.

**9.3. Три агронома, работая вместе, вскопают грядку за 9 минут. Грядка также будет вскопана, если первый проработает 5 минут, затем второй 15 минут, апотом третий 13 минут. Сколько минут должен проработать второй агроном, чтобы оставить третьему ровно 11 минут на завершение вскапывания, если до него первый проработал ровно 7 минут? Предполагается, что каждый агроном работает со своей положительной производительностью, которая не меняется со временем.**

**Ответ 12.**

**Решение. Обозначим полный объем работы по вскапыванию грядки за *A*. Пусть** $p\_{1},p\_{2}$**и** $p\_{3}$**–производительности соответственно первого, второго и третьего агрономов, где производительность — это объем работы выполняемый за минуту. Тогда условие задачи можно записать следующим образом:**

$$A=9p\_{1}+9p\_{2}+9p\_{3}$$

$$A=5p\_{1}+15p\_{2}+13p\_{3}$$

$$A=7p\_{1}+t\_{2}p\_{2}+11p\_{3}$$

**Здесь** $t\_{2}$ **— искомое время работы второго агронома. Возьмемполусумму первых двух уравнений и вычтем третье, получим** $12p\_{2}-t\_{2}p\_{2}=0.$ **Поскольку** $p\_{2}>0$ **, заключаем, что** $t\_{2}=12.$**Важно отметить, что на этом этапе лишь установлено, что *если решение задачи существует, то***$t\_{2}=12$***.* Произошло это потому, что в процессе решения, мы делали логические следствия, а не эквивалентные переходы.Таким образом, мы лишь установили, что** $t\_{2}$ **не может равняться ничему, отличному от 12. Но может ли оно равняться 12? Поэтому важно убедиться, что положительное решение у рассмотренной системы существует. Это не сложно сделать, например, можно взять**$p\_{1}=\frac{11A}{180}$**,** $p\_{2}=\frac{A}{45}$**,** $p\_{3}=\frac{A}{36}$**.**

**Комментарий 1. Снимать один балл, если существование положительного решения системы не показана.**

**Комментарий 2.** Угаданный ответ без обоснования: 1 балл.

**9.4.**В треугольникеABC биссектриса внешнего угла при вершине B пересекает прямуюACв точке М. Докажите, что MC:MA=BC:BA.

**Решение 1.** Заметим, что ∠A ≠ ∠С, поскольку, по условию биссектриса внешнего угла при вершине B не параллельна прямой АС. Будем рассматривать случай, ∠A<∠С (случай ∠A>∠С рассматривается аналогично). Проведем через вершину C прямую, параллельно BM. Пусть она пересекает прямую AB в точке D. Отметим произвольную точку B1 на продолжении луча AB за точку B. Получаем: ∠DCB=∠CBM=∠MBB1=∠CDB. Следовательно, треугольник DBC — равнобедренный, BD=BC. Применяя теорему Фалеса к углу MAB, заключаем, что MC:MA=BD:BA.Поскольку BD = BC,  получим  MC:MA=BC:BA.

**Решение 2.**Из формулы площади треугольника «*S*=½*ah*», следует такой факт: при фиксированной высоте, площадь треугольника пропорциональна основанию. У треугольников MCB и MAB общая высота, опущенная из вершины B. Поэтому:

$\frac{S\_{ΔMCB}}{S\_{ΔMAB}}=\frac{MC}{MA}$.

Точка M равноудалена от прямых AB и BC, следовательно у треугольников MCB и MAB высоты опущенные из вершины M равны. Поэтому:

$\frac{S\_{ΔMCB}}{S\_{ΔMAB}}=\frac{BC}{BA}$.

Доказательство завершено.

**9.5.**Пусть x и y —положительные действительные числа. Докажите, что:

$\sqrt{^{x^{2}}/\_{y}}+\sqrt{^{y^{2}}/\_{x}}\geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

**Решение1.** Возведем обе части неравенства в квадрат, в силу положительности обоих частей неравенства получим эквивалентное неравенство:

$\frac{x^{2}}{y}+2\sqrt{xy}+\frac{y^{2}}{x}\geq x+2\sqrt{xy}+y$ или $\frac{x^{2}}{y}+\frac{y^{2}}{x}\geq x+y$.

Перенесем в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x^{3}-x^{2}y-xy^{2}+y^{3}}{xy}\geq 0$$

$$x^{3}-x^{2}y-xy^{2}+y^{3}=x^{2}\left(x-y\right)-y^{2}\left(x-y\right)=\left(x^{2}-y^{2}\right)\left(x-y\right)=\left(x+y\right)\left(x-y\right)^{2}\geq 0 .$$

**Решение 2.** $\sqrt{^{x^{2}}/\_{y}}+\sqrt{^{y^{2}}/\_{x}}-\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{x}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\left(x-y\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}\geq 0$

**Последнее неравенство следует из того, что множители в числителе либо оба не отрицательны (если** $x\geq y$**), либо оба не положительны (если** $x\leq y$**). Альтернативно, можно воспользоваться тождеством**$\left(x-y\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{2}\geq 0.$

|  |  |
| --- | --- |
| МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИКРАСНОДАРСКОГО КРАЯ**Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центрдополнительного** **образования для детей»**350000 г. Краснодар, ул. Красная, 76тел.259-84-01 E-mail:cdodd@mail.ru | **Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике*****2013-2014 учебный год******10 класс,******решения и методические указания****Председатель ПМК: Бирюк Андрей Эдуардович.* |

**10.1.**Карлсон задумал трехзначное число и выписал его на длинной стене 2013 раз подряд без пробелов, получив многозначное число. Могло ли оно делиться на 2013?

**Ответ:** Да, могло.

**Решение.** Заметим, что 2013=3·671. Если выписать 2013 раз подряд число 671, то полученное 6039-значное число будет делиться на 671. Кроме этого, сумма цифр этого 6039-значного числа равна (6+7+1)·2013=14·3·671 — делится на 3. Значит, по признаку делимости на 3, выписанное число делится и на 3. Поскольку 3 и 671 — взаимно простые, то оно делится и на их произведение.

**Комментарий.** Угаданный ответ без обоснования: 0 баллов.

**10.2.Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелка часов взаимно перпендикулярны?**

**Ответ: 44.**

**Решение.В сутки часовая стрелка делает 2 оборота, а минутная 24. Отсюда минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза и каждый раз с часовой стрелкой образуется по два прямых угла, т.е. ответ: 44.**

**Комментарий.** Угаданный ответ без обоснования: 1 балл.

**10.3.** Набор чисел*a*1, *a*2,..., *a*2013 представляет собой переставленные в некотором порядке числа 1, 2,..., 2013. Каждое число *ak* умножается на его номер *k*, а затем среди полученных 2013 таких произведений выбирается наибольшее. Докажите, что оно не меньше чем 10072.

**Решение.** Чисел *a*k, не меньших 1007, в точности 1007=2013-1006. Поэтому хотя бы одно из них имеет номер, не меньший 1007, и для него *k*·*ak* ≥ 10072.

**10.4.**Пусть действительные числа *a* и *b* различны. Докажите, что уравнение

$$x^{4}+2\left(a+b\right)x^{3}+\left(a^{2}+4ab+b^{2}\right)x^{2}+2\left(a^{3}+b^{3}\right)x+a^{2}b^{2}=0$$

имеет ровно два различных действительных корня.

**Решение.** Разложим левую часть на множители. В силу вида коэффициента при *x*3 будем искать разложение в виде

$$(x^{2}+2ax+c\_{1})(x^{2}+2bx+c\_{2})$$

Далее несложно заключить, что $с\_{1}=b^{2}$ и $c\_{2}=a^{2}$. Итак, мы имеем дело с уравнением:

$$\left(x^{2}+2ax+b^{2}\right)\left(x^{2}+2bx+a^{2}\right)=0 .$$

Дискриминанты этих скобок либо разных знаков, либо оба нулевые. В первом случае получаем, что одна скобка имеет два различных решения, а другая ноль. Во втором случае каждая скобка имеет ровно одно решение: первая: x=-*a,* вторая: x=-*b*. Эти решения различны, поскольку $a\ne b$.

**Комментарий.** Произведено разложение на множители: 4 балла. Причем, школьник имеет право просто угадать это разложение. Т.е. он не обязан (но имеет право) объяснять, как разложение получено.

Не рассмотрен случай нулевого дискриминанта: снимать 1 балл.

**10.5.** В остроугольном треугольнике ABCвысоты BB1 и СС1пересекаются в точке H. Известно, что CH:HC1=1:3, а BH:HB1=4:1. Найдите величину угла Aтреугольника ABC.

**Решение. Пусть CH=x, HB1=y. Тогда HC1=3x и BH=4y. Прямоугольные треугольники CB1H и BC1H подобны. Следовательно,**

$\frac{y}{x}=\frac{3x}{4y}$ **или** $\frac{y^{2}}{x^{2}}=\frac{3}{4}$**. Тогда**$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$**.**

**Углы A и CHB1 равны, так как каждый из них равен 90°-∠HCA.**

$\cos(A)=\cos(CHB\_{1})=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$**.**

**Ответ:∠A=30° или** $\frac{π}{6}$**.**

**Комментарий.** Угаданный ответ без обоснования: 1 балл.

|  |  |
| --- | --- |
| МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИКРАСНОДАРСКОГО КРАЯ**Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Центрдополнительного** **образования для детей»**350000 г. Краснодар, ул. Красная, 76тел.259-84-01 E-mail:cdodd@mail.ru | **Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике*****2013-2014 учебный год******11 класс,******решения и методические указания****Председатель ПМК: Бирюк Андрей Эдуардович.* |

**11.1.**Решите уравнение:

$sin^{2013}x+cos^{2013}x=1$.

**Ответ:** $2πk;\frac{π}{2}+2πk, k\in Z$.

**Решение.** Если $x\ne \frac{πk}{2}$ для целого *k*, то $sin^{2013}x<sin^{2}x$ и $cos^{2013}x<cos^{2}x$.В этом случае левая часть уравнения меньше чем 1. Остаётся четыре серии значений переменной *x*:

$$2πk;\frac{π}{2}+2πk;π+2πk;\frac{3π}{2}+2πk, k\in Z$$

Из них первые две подходят, последние две — нет.

**11.2.** В остроугольном треугольнике ABC высоты AA1, BB1 и CC1 продлили до пересечения с описанной окружностью в точках A2, B2 и С2 соответственно. Докажите, что точки А1, B1 и C1 лежат на биссектрисах треугольника A2B2C2.

**Решение.** Точки A1, B1 и С1 лежат соответственно на отрезках A2A, B2B и С2С. Поэтому нужно доказать, что последние являются биссектрисами углов треугольника A2B2C2. Докажем этот факт, например, для вершины B2(для остальных это делается аналогично). По свойству вписанных углов: **∠C2B2B=∠C2CB и∠BB2A2=∠BAA2. Кроме того,∠C2CB=∠BAA2 , поскольку каждый из них дополняет ∠ABC до 90°. Следовательно, ∠C2B2B=∠BB2A2, то есть B2B — биссектриса угла A2B2C2.**

**11.3.** Карлсон задумал двузначное натуральное число, выписал его на длинной стене 2013 раз подряд без пробелов, получив многозначное число. Могло ли оно делиться на 2013?

**Ответ:** Да, могло.

**Решение.** Заметим, что 2013=3·11·61. Выпишем 2013 раз число 61. Оно будет делиться на 61 — очевидно. А на 3 и 11 по признакам делимости на 3 и 11.

**Комментарий.** Только ответ «да» без обоснования: ноль баллов.

**11.4.**Докажите, что для всех действительных чисел *x* и *y* выполнено неравенство$x^{2}+xy+y^{2}\geq 6(x+y-2)$.

**Решение1.** Пусть $x\geq y$. Умножим на (x-y):

$$x^{3}-y^{3}\geq 6\left(x^{2}-y^{2}\right)-12(x-y)$$

$$f\left(x\right)=x^{3}-6x^{2}+12x\geq y^{3}-6y^{2}+12y=f(y)$$

$$f\left(x\right)=x^{3}-6x^{2}+12x=\left(x-2\right)^{3}+8$$

Функция *f* монотонна, поэтому$f\left(x\right)\geq f(y)$.

**Решение2**. Сделаем замену:$x=t+w$ ,$y=t-w$.

$$\left(t+w\right)^{2}+t^{2}-w^{2}+\left(t-w\right)^{2}\geq 6(2t-2)$$

$$3t^{2}+w^{2}\geq 12t-12 .$$

$$3\left(t-2\right)^{2}+w^{2}\geq 0.$$

**11.5.** По реке, через которую перекинут один мост, движутся плот, лодка и катер. Известно, что когда лодка находилась под мостом, то плот и катер были по разные стороны моста и равноудалены от него. Когда плот был под мостом, то катер и лодка были равноудалены от моста, находясь по разные от него стороны. Докажите, что в момент, когда катер был под мостом, плот и лодка равноудалены от моста. Считать, что скорость реки, плота, лодки и катера постоянны.

**Решение.**Введем на реке координатуx так, что мост находится в нуле. Тогда в силу постоянства скоростей зависимость координаты каждого объекта (лодка, плот, катер) от времени линейная:

$x\_{1}\left(t\right)=a\_{1}t+b\_{1}$(лодка), $x\_{2}\left(t\right)=a\_{2}t+b\_{2}$(плот), $x\_{3}\left(t\right)=a\_{3}t+b\_{3}$ (катер).

Рассмотрим функцию $f\left(t\right)=x\_{1}\left(t\right)+x\_{2}\left(t\right)+x\_{3}(t)$. Это линейная функция.

Пусть $t\_{1}$, $t\_{2}$ и $t\_{3}$ — моменты времени, когда соответственно лодка, плот и катер были под мостом. Если t1=t2, то в этот момент все три объекта были под мостом и доказывать нечего. Поэтому далее считаем, что $t\_{1}$ и $t\_{2}$ — различные моменты времени. По условию $f\left(t\_{1}\right)=f\left(t\_{2}\right)=0$. Следовательно, $f$ является тождественно нулевой функцией. Заключаем, что$f\left(t\_{3}\right)=0$.

**Комментарий.**Не снижать баллы, если случай $t\_{1}=t\_{2}$ не рассматривался.