Министерство образования, науки и молодёжной политики

Краснодарского края

Государственное бюджетное учреждение

дополнительного образования

Краснодарского края «Центр развития одарённости»

**Ответы и критерии оценивания**

**итоговой контрольной работы (олимпиады)**

**по математике для учащихся 7 класса**

**очно-заочного обучения (с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения)**

**(заочные курсы «Юниор»)**

Составитель:

Невечеря Артём Павлович

преподаватель ФГБОУ ВО «КубГУ»

Краснодар

2020

ОТВЕТЫ

Задание 1.

**Решение:**

Воспользуемся методом доказательства от противного:

1) Доказываемое утверждение: «В команде найдутся хотя бы два спортсмена с одинаковым количеством баллов».

2) Обратное утверждение: «В команде не найдутся два спортсмена с одинаковым количеством баллов».

3) Если обратное утверждение верно, то, исходя из условий задачи (жюри могло поставить только натуральное число баллов), команда не смогла бы набрать менее 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 баллов. Получаем противоречие. Следовательно, обратное утверждение ложно, доказываемое утверждение истинно.

**Ответ:** да, найдутся.

**Критерии оценивания.**

Только ответ без пояснений – 0 баллов.

Правильный ответ с корректными пояснениями (метод доказательства от противного; указание на принцип Дирихле; прочее) – 7 баллов.

Задание 2.

**Решение:**

Заметим, что в результате произвольной рокировки количество жителей в городе либо не измениться, либо увеличиться / уменьшиться на 3. Следовательно, остаток от деления количества жителей в городе на 3 – инвариант – это значение остаётся неизменным после каждой рокировки.

Изначально в городах А и Б было, соответственно, 1002 и 3002 жителя, остатки при делении на 3 равны, соответственно, 0 и 2. Предположим, что после некоторого числа рокировок количества жителей в городах сравнялось. Тогда в каждом городе по 2002 жителя – остаток от деления на 3 равен 1, получаем противоречие.

Таким образом, одними только рокировками уровнять количество жителей в городах невозможно.

**Ответ:** нет, не может.

**Критерии оценивания.**

Только ответ без пояснений – 0 баллов.

Правильный ответ с корректными пояснениями – 7 баллов.

Задание 3.

**Решение:**

Так как что *a* + 20 кратно 2020 и *b* + 101 кратно 2020, то (*a* + 20)(*b* + 101) также будет кратно 2020. Заметим, что

(*a* + 20)(*b* + 101) = *ab* + 101*a* + 20*b* + 2020.

Теперь заметим, что 101(*a* + 20) + 20(*b* + 101) также будет кратно 2020 (так как оба слагаемых кратны 2020). Следовательно, 101*a* + 20*b* + 4040 кратно 2020, следовательно, 101*a* + 20*b* кратно 2020.

Таким образом, так как значения выражений *ab* + 101*a* + 20*b* + 2020 и 101*a* + 20*b* кратны 2020, то их разность тоже кратна 2020. То есть, *ab* + 2020 кратно 2020. Следовательно, *ab* кратно 2020.

**Ответ:** всегда.

**Критерии оценивания.**

Только ответ без пояснений – 0 баллов.

Указано, что *ab* + 101*a* + 20*b* + 2020 кратно 2020 – 4 балла.

Правильный ответ с корректными пояснениями – 7 баллов.

Задание 4.

**Решение:**

Всего существует (по комбинаторному правилу произведения):

1) 100 односимвольных маркировок;

2) 100·99 двусимвольных;

3) 100·99·98 трёхсимвольных.

Следовательно, всего маркировок (по комбинаторному правилу суммы):

100 + 100·99 + 100·99·98 = 100(1 + 99(1 + 98)) = 100(1 + 992) = 980200.

**Ответ:** 980200.

**Критерии оценивания.**

В решении не учитывается, что маркировки, порядок символов в которых различается, являются различными – 4 балла.

Правильно рассчитано количество односимвольных, двусимвольных и трёхсимвольных маркировок (дальнейшие продвижения отсутствуют) – 6 баллов.

Получено аналогичное решение, в котором допускается использование одинаковых символов в маркировке – 7 баллов.

Только ответ без пояснений – 7 баллов.

Задание 5.

**Решение:**

Разобьём равносторонний треугольник со стороной 4 на 16 равносторонних треугольников со стороной 1 как указано на рисунке 1.



*Рисунок 1.*

По принципу Дирихле из 33 точек хотя бы 3 окажутся в одном из равносторонних треугольников со стороной 1. Покажем, что парные расстояния между этими точками не больше 1. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

*Утверждение*: расстояние между любыми двумя точками, принадлежащими равностороннему треугольнику, не больше длины его стороны.

*Доказательство*.

Предположим противное – в равностороннем треугольнике со стороной *a* можно выбрать две точки – *O*1, *O*2 – расстояние между которыми будет строго больше *a* (*O*1*O*2 > *a*).

Проведём прямую *l* через *O*1, *O*2 и обозначим точки пересечения *l* со сторонами треугольника как *P*1 и *P*2. Тогда *P*1*P*2 ≥ *O*1*O*2. Выберем такую вершину *R* рассматриваемого равностороннего треугольника, чтобы отрезки *P*1*R* и *P*2*R* лежали на его сторонах. Тогда угол *P*1*RP*2 равен 60о, а сумма углов *RP*1*P*2 и *RP*2*P*1 равна 120o. Следовательно, один из углов (*RP*1*P*2 и *RP*2*P*1) не меньше 60o. Не умаляя общности будем считать, что это угол *RP*1*P*2. Но тогда угол *RP*1*P*2 не меньше угла *P*1*RP*2. Пользуясь тем свойством, что во всяком треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона, получаем *P*1*P*2 ≤ *P*2*R*. Но *P*2*R* ≤ *a*. Следовательно, *O*1*O*2 ≤ *P*1*P*2 ≤ *a*. Получаем противоречие. Утверждение доказано.

**Ответ:** всегда.

**Критерии оценивания**

Только ответ без пояснений – 0 баллов.

Доказано, что хотя бы 3 точки попадут в один из равносторонних треугольников со стороной 1, не доказано, что парные расстояния между этими точками будут не больше 1 – 5 баллов.

Правильный ответ, приведены все необходимые пояснения и доказательства – 7 баллов.

**Общие критерии оценивания**

**Каждое задание оценивается от 0 до 7 баллов в соответствии со следующими критериями:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| **0** | Решение неверное, продвижение отсутствует. Решение отсутствует. |
| **0–1** | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| **2–3** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи. |
| **3–4** | Решение содержит существенные ошибки и пробелы в обоснованиях. После незначительных корректировок и соответствующих дополнений может стать полностью правильным. |
| **5–6** | Решение содержит незначительные ошибки или пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений. |
| **6–7** | Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение. |
| **7** | Полное верное решение. |

**Максимальная оценка за работу при полном и корректном выполнении всех заданий –** **35 баллов**.