Министерство образования, науки и молодёжной политики

Краснодарского края

Государственное бюджетное учреждение

дополнительного образования

Краснодарского края «Центр развития одарённости»

**Ответы и критерии оценивания**

**итоговой контрольной работы (олимпиады)**

**по математике для учащихся 8 класса**

**очно-заочного обучения (с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения)**

**(заочные курсы «Юниор»)**

Составитель:

Кузнецов Егор Александрович,

преподаватель кафедры

информационных образовательных

технологий ФГБОУ ВО «КубГУ»

Краснодар

2020

1. На стене расположены 2019 переключателей. Все они выключены. За один ход можно изменить положение любых восьми переключателей (перевести выключенный в положение включённого и наоборот). Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все переключатели были включены?

**Решение:**

Заметим, что каждый переключатель должен изменить своё положение нечётное число раз, а всего переключателей нечётное число, то есть мы должны сделать нечётное число переключений. Однако при каждом ходе изменяет своё положение чётное число переключателей. Следовательно, добиться того, чтобы все переключатели были включены невозможно.

***Критерии оценивания:***

Правильное решение – 5 баллов.

1. В таблице *m* × *n* расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что *m* = *n*.

**Решение:**

Сумма чисел в таблице не зависит от способа ее подсчета и равна *m* и *n* одновременно.

***Критерии оценивания:***

Правильное решение – 5 баллов.

1. Петя написал на гранях кубика натуральные числа от 1 до 6. Вася кубика не видел, но утверждает, что

а) у этого кубика есть две соседние грани, на которых написаны соседние числа;

б) таких пар соседних граней у кубика не меньше двух.

Прав ли он в обоих случаях? Почему?

**Решение:**

В наборе натуральных чисел от 1 до 6 можно найти пять пар соседних чисел: 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 6. Каждая такая пара может быть написана либо на двух соседних гранях кубика, либо на двух противоположных. Но пар противоположных граней у кубика всего три. Поэтому их могут занимать не более трех пар соседних чисел. Значит, по крайней мере две такие пары занимают соседние грани. Следовательно, можно утверждать, что Вася прав в обоих случаях.

***Критерии оценивания:***

Правильное решение каждого подпункта задачи - по 3 балла. Всего – 6 баллов.

1. Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: чётные и нечётные. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?

**Решение:**

Сумма цифр числа 1 равна сумме цифр числа 1000; остальные числа разобьём на 499 пар: {2, 3}, {4, 5}, ..., {998, 999}. В каждой паре сумма цифр нечётного числа на 1 больше чем сумма цифр чётного.

**Ответ.** Сумма цифр нечётных чисел больше на 499.

***Критерии оценивания:***

Правильное решение – 5 баллов.

1. Докажите, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

**Решение:**

Зафиксируем вершину A. Рассмотрим сначала вершины, соединённые с A, затем – новые вершины, соединённые с ними, и т.д. При этом рёбра, соединяющие добавляемые вершины с уже рассмотренными, ориентируем в направлении к новым вершинам.

***Критерии оценивания:***

Правильное решение – 5 баллов.

а) В группе из четырёх человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим).

Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык.

б) То же для группы из 100 человек.

в) То же для группы из 102 человек.

**Решение:**

а) Рассмотрим граф с четырьмя вершинами A, B, C, D, соответствующими людям, и соединим ребрами людей, знающих общий язык. Условие означает, что каждая тройка вершин соединена хотя бы двумя рёбрами. А доказать нужно, что есть два ребра без общих вершин. Пусть это неверно.

Если в тройке (A, B, C) проведены рёбра AB и AC, то рёбер BD и CD нет. Но тогда в тройке (B, C, D) не больше одного ребра. Противоречие.

б) Разобьём данную группу на подгруппы из 4 человек. Согласно а) каждую подгруппу можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык.

в) Отделим двух человек, говорящих на одном языке, а остальных разобьём на четвёрки. Согласно а) каждую четвёрку можно разбить на две пары с общим языком.

***Критерии оценивания:***

Правильное решение каждого подпункта задачи - по 2 балла. Всего – 6 баллов.

**Максимальное количество баллов за работу – 32.**