Геометрические неравенства. Элементы комбинаторной геометрии

Занятие подготовлено на основе учебного пособия

Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. — 640 с. ISBN 5-94057-214-6

Необходимые страницы этого пособия приведены, начиная со 2-й страницы данного файла.

План занятия

Введение
§ 1. Медиана треугольника
    Решение задач 9.1., 9.2.
§2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника
    Решение задач 9.6., 9.7.
§3. Сумма длин диагоналей четырёхугольника
    Решение задач 9.15., 9.16.
§4. Разные задачи на неравенство треугольника
    Решение задач 9.23., 9.24., 9.25., 9.26.
§5. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух сторон
    Решение задач 9.32., 9.33., 9.34.
§6. Неравенства для площадей
    Решение задач 9.38.
§7-8 не используется
§9. Четырёхугольник
    Решение задач 9.65., 9.66.
§ 10. Многоугольники
    Решение задач 9.77.
Задачи для самостоятельного решения
    Решите задачи 9.99., 9.100., 9.101., 9.102.

ГЛАВА 9

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Основные сведения

1. Для элементов треугольника используются следующие обозначения:
a, b, c — длины сторон BC, CA, AB;
α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C;
m_a, m_b, m_c — длины медиан, проведённых из вершин A, B, C;
h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных из вершин A, B, C;
l_a, l_b, l_c — длины биссектрис, проведённых из вершин A, B, C;
r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

2. Если A, B, C — произвольные точки, то $AB \leqslant AC + CB$, причём равенство достигается, только если точка C лежит на отрезке AB (неравенство треугольника).

3. Медиана треугольника меньше полусуммы заключающих её сторон: $m_a < (b + c)/2$ (задача 9.1).

4. Если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего (задача 9.29 б).

5. Сумма длин диагоналей выпуклого четырёхугольника больше суммы длин любой пары его противоположных сторон (задача 9.15).

6. Против большей стороны треугольника лежит больший угол (задача 10.62).

7. Длина отрезка, лежащего внутри выпуклого многоугольника, не превосходит либо наибольшей стороны, либо наибольшей диагонали (задача 10.67).

8. При решении некоторых задач этой главы нужно знать разные алгебраические неравенства. Сведения об этих неравенствах и их доказательства приведены в приложении к настоящей главе (см. с. 230); с ними следует познакомиться, но нужно учесть, что они требуются только для решения достаточно сложных задач, а для решения простых задач понадобятся лишь неравенство $\sqrt{ab} \leqslant (a + b)/2$ и следствия из него.

Вводные задачи

1. Докажите, что $S_{ABC} \leqslant AB \cdot BC/2$.

2. Докажите, что $S_{ABCD} \leqslant (AB \cdot BC + AD \cdot DC)/2$.

3. Докажите, что $\angle ABC > 90^\circ$ тогда и только тогда, когда точка B лежит внутри окружности с диаметром AC.

4. Радиусы двух окружностей равны R и r, а расстояние между их центрами равно d. Докажите, что эти окружности пересекаются тогда и только тогда, когда $|R - r| < d < R + r$.

5. Докажите, что любая диагональ четырёхугольника меньше половины его периметра.

§ 1. Медиана треугольника

9.1. Докажите, что $(a+b-c)/2 < m_c < (a+b)/2$.

9.2. Докажите, что в любом треугольнике сумма медиан больше 3/4 периметра, но меньше периметра.

9.3. Даны n точек $A_1, \ldots, A_n$ и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что $MA_1 + \ldots + MA_n \geqslant n$.

9.4. Точки $A_1, \ldots, A_n$ не лежат на одной прямой. Пусть две разные точки P и Q обладают тем свойством, что $A_1P + \ldots + A_nP = A_1Q + \ldots + A_nQ = s$. Докажите, что тогда $A_1K + \ldots + A_nK < s$ для некоторой точки K.

9.5*. На столе лежит 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

§ 2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника

В задачах этого параграфа a, b и c — длины сторон произвольного треугольника.

9.6. Докажите, что $a = y + z$, $b = x + z$ и $c = x + y$, где x, y и z — положительные числа.

9.7. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

9.8. При любом натуральном n из чисел a^n, b^n и c^n можно составить треугольник. Докажите, что среди чисел a, b и c есть два равных.

9.9. Докажите, что

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

9.10. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

9.11. Пусть $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$. Докажите, что $|p - q| < 1$.

9.12*. Пять отрезков таковы, что из любых трёх из них можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

9.13*. Докажите, что $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqslant abc$.

9.14*. Докажите, что $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$.

§ 3. Сумма длин диагоналей четырёхугольника

9.15. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Докажите, что $AB + CD < AC + BD$.

9.16. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, причём $AB + BD \leqslant AC + CD$. Докажите, что $AB < AC$.

9.17*. Внутри выпуклого четырёхугольника с суммой длин диагоналей d расположен выпуклый четырёхугольник с суммой длин диагоналей d'. Докажите, что $d' < 2d$.

9.18*. Дана замкнутая ломаная, причём любая другая замкнутая ломаная с теми же вершинами имеет бóльшую длину. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.

9.19*. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

9.20*. На плоскости даны n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

9.21*. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

9.22*. Дан выпуклый $(2n + 1)$-угольник $A_1A_3A_5 \ldots A_{2n+1}A_2 \ldots A_{2n}$. Докажите, что среди всех замкнутых ломаных с вершинами в его вершинах наибольшую длину имеет ломаная $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n+1}A_1$.

См. также задачу 6.93.

§ 4. Разные задачи на неравенство треугольника

9.23. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

9.24. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

9.25. Докажите, что если длины сторон треугольника связаны неравенством $a^2 + b^2 > 5c^2$, то c — длина наименьшей стороны.

9.26. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

9.27. Дан треугольник ABC и точка D внутри его, причём $AC - DA > 1$ и $BC - BD > 1$. Пусть E — произвольная точка внутри отрезка AB. Докажите, что $EC - ED > 1$.

9.28*. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что $BA_1 = \lambda \cdot BC$, $CB_1 = \lambda \cdot CA$, $AC_1 = \lambda \cdot AB$, причём $1/2 < \lambda < 1$. Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами $(2\lambda - 1)P < P_1 < \lambda P$.

* * *

9.29*. а) Докажите, что при переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке периметр уменьшается. (Выпуклой оболочкой многоугольника называют наименьший выпуклый многоугольник, его содержащий.)

б) Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего.

9.30*. Внутри треугольника ABC периметра P взята точка O. Докажите, что $P/2 < AO + BO + CO < P$.

9.31*. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась точка E, обладающая тем свойством, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. Докажите, что тогда $BC = AD/2$.

См. также задачи 13.43, 20.12.

§ 5. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух сторон

9.32. Дан треугольник площади 1 со сторонами $a \leqslant b \leqslant c$. Докажите, что $b \geqslant \sqrt{2}$.

9.33. Пусть E, F, G и H — середины сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что

$$S_{ABCD} \leqslant EG \cdot HF \leqslant (AB + CD)(AD + BC)/4.$$

9.34. Периметр выпуклого четырёхугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

9.35. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $4S \leqslant AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$, где S — площадь треугольника ABC.

9.36*. В окружность радиуса R вписан многоугольник площади S, содержащий центр окружности, и на его сторонах выбрано по точке. Докажите, что периметр выпуклого многоугольника с вершинами в выбранных точках не меньше $2S/R$.

9.37*. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ площади S взята точка O, причём $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Докажите, что тогда $ABCD$ — квадрат и O — его центр.

§ 6. Неравенства для площадей

9.38. Точки M и N лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $AM = CN$ и $AN = BM$. Докажите, что площадь четырёхугольника $BMNC$ по крайней мере в три раза больше площади треугольника AMN.

9.39. Площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S, S_1, S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \leqslant 4\sqrt{S_1S_2}$.

9.40. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник площади S. Угол между прямыми AB и CD равен α, угол между AD и BC равен β. Докажите, что

$$AB \cdot CD \sin\alpha + AD \cdot BC \sin\beta \leqslant 2S \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

9.41. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Обозначим площади частей, на которые эти прямые разбивают треугольник, так, как показано на рис. 9.1. Докажите, что $a/\alpha + b/\beta + c/\gamma \geqslant 3/2$.

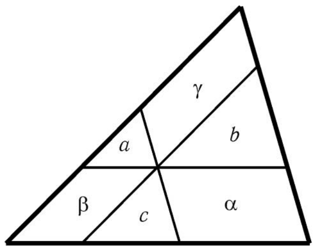

Рис. 9.1

9.42. Площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны S и S_1, причём треугольник ABC не тупоугольный. Наибольшее из отношений a_1/a, b_1/b и c_1/c равно k. Докажите, что $S_1 \leqslant k^2S$.

9.43. а) Точки B, C и D делят (меньшую) дугу AE окружности на четыре равные части. Докажите, что $S_{ACE} < 8S_{BCD}$.

б) Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности. Через середину D (меньшей) дуги BC проведена касательная, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Докажите, что $S_{BCD} < 2S_{MAN}$.

9.44*. Все стороны выпуклого многоугольника отодвигаются во внешнюю сторону на расстояние h. Докажите, что его площадь при этом увеличится больше чем на $Ph + \pi h^2$, где P — периметр.

9.45*. Квадрат разрезан на прямоугольники. Докажите, что сумма площадей кругов, описанных около всех этих прямоугольников, не меньше площади круга, описанного около исходного квадрата.

9.46*. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

9.47*. а) Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике площади S найдётся диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше $S/6$.

б) Докажите, что в любом выпуклом восьмиугольнике площади S найдётся диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше $S/8$.

9.48*. Проекции многоугольника на ось OX, биссектрису 1-го и 3-го координатных углов, ось OY и биссектрису 2-го и 4-го координатных углов равны соответственно 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника равна S. Докажите, что $S \leqslant 17{,}5$.

См. также задачу 17.19.

§ 7. Площадь. Одна фигура лежит внутри другой

9.49. Выпуклый многоугольник, площадь которого больше 0,5, помещён в квадрат со стороной 1. Докажите, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины 0,5, параллельный стороне квадрата.

9.50*. Внутри квадрата со стороной 1 даны n точек. Докажите, что:

а) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках или вершинах квадрата не превосходит $\dfrac{1}{2(n+1)}$;

б) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках не превосходит $1/(n-2)$.

9.51*. а) В круг площади S вписан правильный n-угольник площади S_1, а около этого круга описан правильный n-угольник площади S_2. Докажите, что $S^2 > S_1S_2$.

б) В окружность, длина которой равна L, вписан правильный n-угольник периметра P_1, а около этой окружности описан правильный n-угольник периметра P_2. Докажите, что $L^2 < P_1P_2$.

9.52*. Многоугольник площади B вписан в окружность площади A и описан вокруг окружности площади C. Докажите, что $2B \leqslant A + C$.

9.53*. В круг радиуса 1 помещено два треугольника, площадь каждого из которых больше 1. Докажите, что эти треугольники пересекаются.

9.54*. а) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P.

б) Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2. Докажите, что $2S_1/P_1 > S_2/P_2$.

9.55*. Докажите, что площадь параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади треугольника.

9.56*. Докажите, что площадь треугольника, вершины которого лежат на сторонах параллелограмма, не превосходит половины площади параллелограмма.

* * *

9.57*. Докажите, что любой остроугольный треугольник площади 1 можно поместить в прямоугольный треугольник площади $\sqrt{3}$.

9.58*. а) Докажите, что выпуклый многоугольник площади S можно поместить в некоторый прямоугольник площади не более $2S$.

б) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S можно вписать параллелограмм площади не менее $S/2$.

9.59*. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить треугольник, площадь которого не меньше: а) $1/4$; б) $3/8$.

9.60*. Выпуклый n-угольник помещён в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдутся три такие вершины A, B и C этого n-угольника, что площадь треугольника ABC не превосходит: а) $8/n^2$; б) $16\pi/n^3$.

См. также задачу 15.8.

§ 8. Ломаные внутри квадрата

9.61*. Внутри квадрата со стороной 1 расположена несамопересекающаяся ломаная длины 1000. Докажите, что найдётся прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая эту ломаную по крайней мере в 500 точках.

9.62*. В квадрате со стороной 1 расположена ломаная длиной L. Известно, что каждая точка квадрата удалена от некоторой точки этой ломаной меньше чем на ε. Докажите, что тогда $L \geqslant \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{\pi\varepsilon}{2}$.

9.63*. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая все эти точки, длина которой не превосходит $2n$.

9.64*. Внутри квадрата со стороной 100 расположена ломаная L, обладающая тем свойством, что любая точка квадрата удалена от L не больше чем на 0,5. Докажите, что на L есть две точки, расстояние между которыми не больше 1, а расстояние по L между ними не меньше 198.

§ 9. Четырёхугольник

9.65. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и B равны, а $\angle D > \angle C$. Докажите, что тогда $AD < BC$.

9.66. В трапеции $ABCD$ углы при основании AD удовлетворяют неравенствам $\angle A < \angle D < 90^\circ$. Докажите, что тогда $AC > BD$.

9.67. Докажите, что если два противоположных угла четырёхугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче другой диагонали.

9.68. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до трёх вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвёртой вершины.

9.69. Угол A четырёхугольника $ABCD$ тупой; F — середина стороны BC. Докажите, что $2FA < BD + CD$.

9.70. Дан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (*неравенство Птолемея*).

9.71. Пусть M и N — середины сторон BC и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$.

9.72. Точка P лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что сумма расстояний от точки P до вершин четырёхугольника меньше суммы попарных расстояний между вершинами четырёхугольника.

9.73. Диагонали делят выпуклый четырёхугольник $ABCD$ на четыре треугольника. Пусть P — периметр четырёхугольника $ABCD$, Q — периметр четырёхугольника, образованного центрами вписанных окружностей полученных треугольников. Докажите, что $PQ > 4S_{ABCD}$.

9.74. Докажите, что расстояние от одной из вершин выпуклого четырёхугольника до противоположной диагонали не превосходит половины этой диагонали.

9.75*. Отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а концы его лежат на сторонах AB и CD. Докажите, что длина отрезка KL не превосходит длины одной из диагоналей.

9.76*. В параллелограмм P_1 вписан параллелограмм P_2, а в параллелограмм P_2 вписан параллелограмм P_3, стороны которого параллельны сторонам P_1. Докажите, что длина хотя бы одной из сторон P_1 не превосходит удвоенной длины параллельной ей стороны P_3.

См. также задачи 13.21, 15.3 а).

§ 10. Многоугольники

9.77. Докажите, что если углы выпуклого пятиугольника образуют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше 36°.

9.78*. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1, причём $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $AE = 2$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

9.79*. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 взята точка P. Докажите, что расстояния от точки P до некоторых трёх вершин шестиугольника не меньше 1.

9.80*. Докажите, что если стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны 1, то радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не превосходит 1.

9.81*. Длины сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ меньше 1. Докажите, что длина одной из диагоналей AD, BE, CF меньше 2.

9.82*. Семиугольник $A_1 \ldots A_7$ вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри его, то сумма углов при вершинах A_1, A_3, A_5 меньше 450°.

* * *

9.83. а) Докажите, что если длины проекций отрезка на две взаимно перпендикулярные прямые равны a и b, то его длина не меньше $(a+b)/\sqrt{2}$.

б) Длины проекций многоугольника на координатные оси равны a и b. Докажите, что его периметр не меньше $\sqrt{2}(a+b)$.

9.84*. Докажите, что из сторон выпуклого многоугольника периметра P можно составить два отрезка, длины которых отличаются не более чем на $P/3$.

9.85*. Многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ составлен из n твёрдых стержней, соединённых шарнирами. Докажите, что если $n>4$, то его можно деформировать в треугольник.

9.86*. Внутри выпуклого многоугольника $A_1\dots A_n$ взята точка O. Пусть α_k — величина угла при вершине A_k, $x_k=OA_k$, d_k — расстояние от точки O до прямой A_kA_{k+1}. Докажите, что $\sum x_k\sin(\alpha_k/2)\geqslant\sum d_k$ и $\sum x_k\cos(\alpha_k/2)\geqslant p$, где p — полупериметр многоугольника.

9.87*. Правильный $2n$-угольник M_1 со стороной a лежит внутри правильного $2n$-угольника M_2 со стороной $2a$. Докажите, что многоугольник M_1 содержит центр многоугольника M_2.

9.88*. Внутри правильного многоугольника $A_1\dots A_n$ взята точка O. Докажите, что по крайней мере один из углов A_iOA_j удовлетворяет неравенствам $\pi(1-1/n)\leqslant\angle A_iOA_j\leqslant\pi$.

9.89*. Докажите, что при $n\geqslant 7$ внутри выпуклого n-угольника найдётся точка, сумма расстояний от которой до вершин больше периметра.

9.90*. а) Выпуклые многоугольники $A_1\dots A_n$ и $B_1\dots B_n$ таковы, что все их соответственные стороны, кроме A_1A_n и B_1B_n, равны и $\angle A_2\geqslant\angle B_2,\ \dots,\ \angle A_{n-1}\geqslant\angle B_{n-1}$, причём хотя бы одно из неравенств строгое. Докажите, что $A_1A_n>B_1B_n$.

б) Соответственные стороны неравных многоугольников $A_1\dots A_n$ и $B_1\dots B_n$ равны. Запишем возле каждой вершины многоугольника $A_1\dots A_n$ знак разности $\angle A_i-\angle B_i$. Докажите, что при $n\geqslant 4$ соседних вершин с разными знаками будет по крайней мере четыре пары. (Вершины с нулевой разностью выбрасываются из рассмотрения: две вершины, между которыми стоят только вершины с нулевой разностью, считаются соседними.)

См. также задачи 4.38, 4.54, 13.45.

§ 11. Разные задачи

9.91. На отрезке длиной 1 дано n точек. Докажите, что сумма расстояний от некоторой точки отрезка до этих точек не меньше $n/2$.

9.92*. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть провод из точки A в точку B, расстояние между которыми равно l. Докажите, что для этой цели ему достаточно куска провода длиной $1{,}6l$.

9.93*. В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту меньше 100 м. Докажите, что этот лес можно огородить забором длиной 200 м.

9.94*. Многоугольник (не обязательно выпуклый), вырезанный из бумаги, перегибается по некоторой прямой и обе половинки склеиваются. Может ли периметр полученного многоугольника быть больше, чем периметр исходного?

9.95*. В треугольник вписана окружность. Около неё описан квадрат. Докажите, что вне треугольника лежит не больше половины периметра квадрата.

* * *

9.96. Докажите, что замкнутую ломаную длины 1 можно поместить в круг радиуса 0,25.

9.97*. Остроугольный треугольник расположен внутри окружности. Докажите, что её радиус не меньше радиуса описанной окружности треугольника.

Верно ли это утверждение для тупоугольного треугольника?

9.98*. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.

См. также задачи 14.25, 20.4.

Задачи для самостоятельного решения

9.99. Два отрезка делят прямоугольник $ABCD$ на четыре прямоугольника. Докажите, что площадь одного из прямоугольников, прилегающих к вершинам A и C, не превосходит четверти площади $ABCD$.

9.100. Докажите, что если $AB+BD=AC+CD$, то серединный перпендикуляр к стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекает отрезок AD.

9.101. Докажите, что если диагональ BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ делит пополам диагональ AC и $AB>BC$, то $AD<DC$.

9.102. Основания описанной трапеции равны 2 и 11. Докажите, что продолжения её боковых сторон пересекаются под острым углом.

9.103. Основания трапеции равны a и b, а высота равна h. Докажите, что длина одной из её диагоналей не меньше $\sqrt{h^2+(b+a)^2/4}$.

9.104. Вершины n-угольника M_1 являются серединами сторон выпуклого n-угольника M. Докажите, что при $n\geqslant 3$ периметр M_1 не меньше половины периметра M, а при $n\geqslant 4$ площадь M_1 не меньше половины площади M.

9.105. В окружность радиуса 1 вписан многоугольник, длины сторон которого заключены между 1 и $\sqrt{2}$. Найдите число его сторон.

Приложение. Некоторые неравенства

1. Наиболее часто используется *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел*: $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$,