Министерство образования, науки и молодёжной политики
Краснодарского края
Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края «Центр развития одарённости»

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы № 4 по математике для учащихся 6 класса очно-заочного обучения (с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения) (заочные курсы «Юниор»)

Составитель:
Кузнецов Егор Александрович,
преподаватель кафедры
информационных образовательных технологий
Кубанского государственного университета

г. Краснодар
2020

Аннотация

Данная методическая разработка является сборником контрольных работ и методических рекомендаций по их проведению для реализации дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (6 класс)». Сборник направлен на развитие интеллектуальных умений учащихся на основе формирования у ребенка умений управлять процессами творчества: фантазированием, пониманием закономерностей, решением сложных проблемных ситуаций.

Пояснительная записка

Программа «Курс математики для начинающего олимпиадника (6 класс)» разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 года, №1897, с изменениями), федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 года, № 413 с изменениями), методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (письмо Минобрнауки РФ от 18.11.2015 № 09-32-42).

Введение

Актуальность

Проблема работы с одаренными учащимися чрезвычайно актуальна для современного российского общества. К школе предъявляются сегодня высокие требования. Именно поэтому так важно определить основные задачи и направления работы с одаренными детьми в системе дополнительного образования.

Одаренность — это системное, развивающееся в течение жизни качество психики, которое определяет возможность достижения человеком более высоких (необычных, незаурядных) результатов в одном или нескольких видах деятельности по сравнению с другими людьми.

Никакого особого «рецепта» по работе с одаренными детьми нет. По своей природной сути большинство детей талантливы. Беда в том, что не все из них об этом знают. Проблема «нераскрытости» детей заключается в том, что воспитание в семье не всегда помогает раскрыться личности ребенка, а система образовательного процесса в школе не позволяет «рассмотреть» особенности каждого ребенка. Учебный процесс в общеобразовательной школе предполагает, что ребенок должен соответствовать стандарту тех требований, которые к нему предъявляются. Таким образом, многогранность и сложность явления одаренности определяет целесообразность существования разнообразных направлений, форм и методов работы с одаренными детьми.

Актуальность методической разработки определяется потребностью со стороны одарённых школьников на программы изучения математики, учебно-методические условия для реализации которых имеются на базе факультета математики и компьютерных наук КубГУ.

Новизна

Характерной особенностью программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (6 класс)» является интеграция основного и дополнительного образования. Новизна дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы состоит в том, что талантливые обучающиеся вовлекаются в учебную деятельность, основываясь не на традиционных школьных учебных методах работы, а на методах классического университетского образования, более соответствующего запросам учеников. Также содержание программы позволяет не только углубить интеллектуальные познания учеников, но и расширить и дополнить процесс их гражданского воспитания. При этом приоритет программы отдается развитию у учащихся знаний и навыков, позволяющих успешно выступать на муниципальном, региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Цель

Целью данной методической разработки является обеспечение подготовки школьников к участию в олимпиадном движении по предмету Математика и углубленное изучение курса математики.

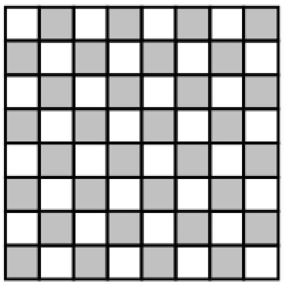
Основная часть

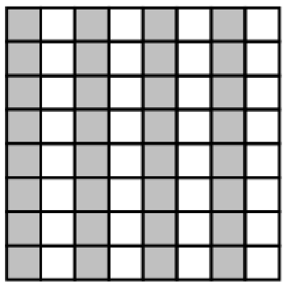
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Шахматная раскраска

Типовые задачи:

При решении следующих задач вам помогут шахматная раскраска, раскраска в полоску, раскраска по диагоналям:





1	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*
3	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*
2	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
1	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*
3	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*
2	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
1	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*
3	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*	*1*

1	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*
4	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*
3	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*
2	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*
1	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*
4	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*
3	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*
2	*3*	*4*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*

1. У шахматной доски выпилены две противоположные угловые клетки. Можно ли такую испорченную доску распилить на доминошки?
2. Конь вышел с некоторого поля шахматной доски и через некоторое число ходов вернулся на это же поле. Докажите, что он сделал четное число ходов.
3. Можно ли хромым королем (король не может ходить по диагонали) обойти по одному разу все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?
4. Можно ли разрезать прямоугольник 4×5 на 5 различных фигурок «тетрамино» (фигурки, составленные из четырех клеток, как-то примыкающих друг к другу по стороне)?
5. На доске 8×8 для "морского боя" стоит 3-палубный корабль. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить его?
6. На шахматной доске стоит несколько королей. Докажите, что их можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы короли одного цвета не били друг друга.
7. В фирме 1111 сотрудников. Каждый из них обязан отработать в году 7 дней подряд на уборке территории. Докажите, что найдется 7 дней в году (не обязательно идущих подряд), что на уборке в этот день работало нечетное число сотрудников.

<u>Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:</u>

Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. 5-7 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций/А. В. Спивак. – 6-е изд. – М. Просвещение, 2016.

Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике.

Математические игры

Под понятием *математической игры* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией,* которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики-нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада или результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и *ничейной стратегии*, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Например крестики-нолики (на доске 3×3) являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия (либо выигрышная, либо ничейная) в этих играх существует, она не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

Соответствие. Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция являются выигрышной, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из неё ведёт к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

Типовые задачи:

1. В строчку выписано 100 единиц. Кирилл и Даниил по очереди ставят между какими-нибудь двумя соседними единицами знак плюс или минус. Когда между всеми соседними числами поставлены знаки, вычисляется результат. Если полученное число чётно, то выигрывает Кирилл, в противном случае — Даниил. Кто выиграет, если начинает Кирилл?

2. На доске написано 10 единиц и 10 двоек. Двое играют по следующим правилам: за ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй. Кто выиграет?

3. Маша и Ваня по очереди ломают шоколадку «Алёнка» размером 6×8. За один ход можно сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет, если первый разлом делает Маша?

4. Остап Бендер провел сеанс одновременной игры в шахматы с двумя гроссмейстерами, причем с одним из соперников он играл чёрными фигурами, а с другим — белыми. За этот сеанс Остап получил 1 очко. (За победу в шахматной партии дается 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков.) Как он смог этого добиться?

5. а) Имеются две кучки по 10 спичек. Двое по очереди берут спички, причём за один ход разрешается брать любое количество спичек, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

б) А если в одной кучке 20, а в другой 30 спичек?

6. В каждой клетке доски 7×7 стоит шашка. Двое по очереди снимают с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Укажите выигрышную стратегию для первого игрока.

7. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

8. а) В кучке лежит 20 карандашей. Каляка и Маляка по очереди берут карандаши из кучки. За один ход разрешается взять от 1 до 4 карандашей. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет, если начинает игру Каляка?

б) А если за один ход разрешается брать от 1 до 5 карандашей?

9. В кучке 25 камней. Двое по очереди берут из кучки 2, 4 или 7 камней. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

10. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка.

Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

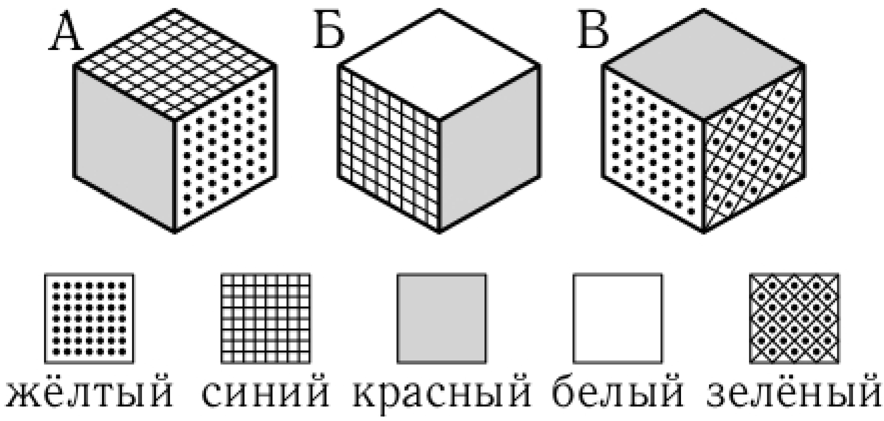
<u>Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:</u>

Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. 5-7 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций/А. В. Спивак. – 6-е изд. – М. Просвещение, 2016.

Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике.

Квадраты и кубы.

1. На рисунках А, Б, В изображён один и тот же куб. Грань какого цвета расположена напротив красной?



2. Сложите куб 3×3×3 из красных, жёлтых и синих кубиков 1×1×1 так, чтобы в любом бруске 1×1×3 были кубики всех цветов.
3. Два куба 3×3×3 имеют: **а)** ровно один общий кубик; **б)** ровно два общих кубика. В каждом из этих случаев определите, из скольких кубиков состоит такая фигура и из скольких квадратиков состоит поверхность такой фигуры.
4. а) Какое наименьшее число прямолинейных разрезов нужно сделать, чтобы разрезать куб 3×3×3 на маленькие кубики 1×1×1? После каждого разреза полученные части можно перекладывать как угодно.
б) Тот же вопрос для куба 4×4×4.
5. Муравей сидит в вершине бумажного куба. Как ему доползти до противоположной вершины куба кратчайшим путём?
6. Дан куб 2×2×2. Можно ли наклеить на его поверхность без наложений 10 квадратов 1×1 так, чтобы никакие два квадрата не граничили по отрезку (по стороне или её части)? Квадраты могут иметь общие вершины. Перегибать квадраты нельзя.
7. Какое наибольшее число брусков 1×2×2 можно уместить в кубе 3×3×3 без пересечений?

Инвариант

Инвариант — величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться *чётность* или *раскраска*. В задачах про сумму цифр используются остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* — величина, изменяющаяся только в одну сторону (т. е. которая может только увеличиваться или только уменьшаться). Понятие полуинварианта часто используется при доказательствах остановки процессов.

Пример 1. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

Решение. Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод — ананас, если число бананов было нечётным, то — банан.

Пример 2. В одной клетке квадратной таблицы 4×4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

Решение. Заменим знак «+» на число 1 и знак «−» на число -1. Заметим, что *произведение всех чисел в таблице* не меняется при смене знака у всех чисел столбца или строки. В начальном положении это произведение равно -1, а в таблице из одних плюсов $+1$, чем и доказана невозможность перехода.

Пример 3. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

Решение. Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что чётность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой ситуации — нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

Типовые задачи:

1. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков?

2. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 монет?

3. На столе стоят 5 стаканов. Из них 4 стакана стоят правильно, а один (тот, который стоит в центре) перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые три стакана. а) Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно? б) А если всего стаканов 7, правильно стоят все, кроме центрального, а за один ход разрешается переворачивать 4 стакана?

4. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?

5. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

6. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

7. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

<u>**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**</u>

Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. 5-7 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций/А. В. Спивак. – 6-е изд. – М. Просвещение, 2016.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №4

Задача 1.

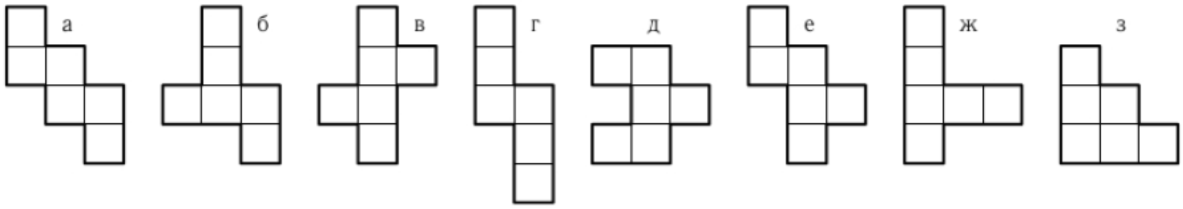
Какую клетку можно выпилить в доске 5×5, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на доминошки? (Каждая доминошка покрывает ровно две клетки доски.)

Задача 2.

На столе лежат 23 карточки. Двое по очереди берут из кучки 1, 3 или 4 карточки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре, тот, кто ходит первым или вторым?

Задача 3.

Какие из этих фигур можно сложить и получить куб, а какие — нельзя?



Задача 4.

Школьники играют на поляне. У них есть три мяча разных цветов. Отметив начальное положение мячиков (получился треугольник), ребята стали по очереди выбирать один мячик и ударом ноги отправляли его катиться так, что он прокатывался между двумя другими. Могут ли они добиться того, чтобы каждый мяч вернулся в своё исходное положение за нечётное число таких ходов?

Задача 5.

В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли быть, что из них ровно 19 делятся на три?

Критерии оценивания

Задача 1.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 2.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 3.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 4.
Правильное решение – 5 баллов.

Задача 5.
Правильное решение – 5 баллов.

Максимальное количество баллов – 25.