Министерство образования, науки и молодёжной политики

Краснодарского края

Государственное бюджетное учреждение

дополнительного образования

Краснодарского края «Центр развития одарённости»

**Методические рекомендации**

**к выполнению контрольной работы № 3**

**по математике для учащихся 8 класса заочных курсов «Юниор»
очно-заочного обучения (с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения)**

Составитель:

Кузнецов Егор Александрович,

преподаватель кафедры

информационных образовательных технологий

Кубанского государственного университета

Краснодар

2020

**Аннотация**

Данная методическая разработка является сборником контрольных работ и методических рекомендаций по их проведению для реализации дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (8 класс)». Сборник направлен на развитие интеллектуальных умений учащихся на основе формирования у ребенка умений управлять процессами творчества: фантазированием, пониманием закономерностей, решением сложных проблемных ситуаций.

**Пояснительная записка**

Программа «Курс математики для начинающего олимпиадника (6 класс)» разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 года, №1897, с изменениями), федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 года, № 413 с изменениями), методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (письмо Минобрнауки РФ от 18.11.2015 № 09-32-42).

**Актуальность**

Проблема работы с одаренными учащимися чрезвычайно актуальна длясовременного российского общества. К школе предъявляются сегодня высокие требования. Именно поэтому так важно определить основные задачи и направления работы с одаренными детьми в системе дополнительного образования.

Одаренность — это системное, развивающееся в течение жизни качество психики, которое определяет возможность достижения человеком более высоких (необычных, незаурядных) результатов в одном или нескольких видах деятельности по сравнению с другими людьми.

Никакого особого «рецепта» по работе с одаренными детьми нет. По своей природной сути большинство детей талантливы. Беда в том, что не все из них об этом знают. Проблема «нераскрытости» детей заключается в том, что воспитание в семье не всегда помогает раскрыться личности ребенка, а система образовательного процесса в школе не позволяет «рассмотреть» особенности каждого ребенка. Учебный процесс в общеобразовательной школе предполагает, что ребенок должен соответствовать стандарту тех требований, которые к нему предъявляются. Таким образом, многогранность

и сложность явления одаренности определяет целесообразность существования разнообразных направлений, форм и методов работы с одаренными детьми.

Актуальность методической разработки определяется потребностью со стороны одарённых школьников на программы изучения математики, учебно-методические условия для реализации которых имеются на базе факультета математики и компьютерных наук КубГУ.

**Новизна**

Характерной особенностью программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (8 класс)» является интеграция основного и дополнительного образования. Новизна дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы состоит в том, что талантливые обучающиеся вовлекаются в учебную деятельность, основываясь не на традиционных школьных учебных методах работы, а на методах классического университетского образования, более соответствующего запросам учеников. Также содержание программы позволяет не только углубить интеллектуальные познания учеников, но и расширить и дополнить процесс их гражданского воспитания. При этом приоритет программы отдается развитию у учащихся знаний и навыков, позволяющих успешно выступать на муниципальном, региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике.

**Цель**

Целью данной методической разработки является обеспечение подготовки школьников к участию в олимпиадном движении по предмету Математика и углубленное изучение курса математики.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ**

***Уравнения в целых числах.***

Уравнения в целых числах – это алгебраические уравнения с двумя или более неизвестными переменными и целыми коэффициентами. Решениями такого уравнения являются все целочисленные (иногда натуральные или рациональные) наборы значений неизвестных переменных, удовлетворяющих этому уравнению.

Александрийский математик Диофант, живший около 2 тысяч лет тому назад, решил большое число таких уравнений и описал общие методы их решения в своей книге «Арифметика». Уравнения в целых числах также называют *диофантовыми уравнениями*.

Примером диофантового уравнения является уравнение вида

.

Подобные уравнения называются *однородными линейными уравнениями*. Они имеют бесконечно много решений в целых числах. Эти решения описываются формулами .

Рассмотрим неоднородные линейные уравнения вида,

, (1)

которые решаются в целых числах, коэффициенты *a*, *b*, *c* – целые числа.

При решении таких уравнений нужно иметь в виду следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если число *c* не делится на НОД(*a*,*b*), то уравнение (1) не имеет решений.

**Теорема 2.** Если (*x*0;*y*0) – какое-либо целочисленное решение уравнения (1), то любые числа вида

где *t* – произвольное целое число, также являются решениями уравнения (1).

**Типовые задачи**

1. У фонарного столба стоит человек. Он может делать 5 или 7 шагов влево или вправо от столба. Сможет ли он оказаться в 3-х шагах справа от столба? Если сможет, то как он должен делать шаги?

2. Найдите все решения уравнений в целых числах: а) x − y=0; б) 3x − 5y=0; в) 15x − 9y=0.

3. В уравнении 3x + 5y=13, выразив y через x, постройте график прямой y=f(x). Определите по графику, какие точки (x,y) на нем имеют целые координаты. С какими периодами по осям Ox и Oy повторяются эти координаты?

4. Решите уравнение 5x − 7y=3 в целых числах "по шагам":

а) найдите какое-нибудь одно решение (x0,y0), то есть такие x0 и y0, чтобы выполнялось равенство 5x0 − 7y0=3;

б) докажите, что если (x,y) — любое решение уравнения 5x − 7y=3, то тогда 5(x − x0) − 7(y − y0)=0;

в) найдите все решения уравнения 5z − 7t=0 в целых числах;

г) найдите все решения уравнения 5x − 7y=3 в целых числах.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b найдутся целые числа z и t, такие что НОД(a,b)=az + bt.

6. Для уравнения ax + by=c:

а) докажите, что оно имеет решения тогда и только тогда, когда c делится на НОД(a,b);

б) докажите, что все его решения имеют вид:



 где (x0,y0) — любое решение, а t пробегает все целые числа.

7. Решите в целых числах уравнения: а) 3x − 5y=13; б) 3x − 5y=19;
в) 10x − 15y= − 5.

8. Вы предлагаете товарищу умножить число даты его рождения на 12, а номер месяца — на 31. (Например, для даты рождения 1 мая получится 1·12 + 5·31 = 167.) Он сообщает вам сумму этих произведений, а вы вычисляете по ней дату его рождения. Как?

9. Квадрат 8×8 распилили на квадраты 2×2, доминошки 1×2 и пентаминошки (от греч. *«пента»* — пять), имеющие вид прямоугольников 2×3 с выкинутой угловой клеткой. Известно, что общая длина распилов равна 52. Сколько могло получиться квадратов, если пентаминошек оказалось больше, чем доминошек?

10. Три брата родились в один и тот же день, но в разные годы. Когда старшему исполнилось 13 лет, сумма возрастов всех трех братьев нацело разделилась на 13. (Подразумевается, что все они к тому времени уже родились.) Докажите, что когда среднему из братьев исполнится 13 лет, сумма возрастов всех братьев не будет кратна 13.

11. Решите уравнения в целых числах:

a) (2*x* + *y*) (5*x* + 3*y*) = 7;

b) *xy* = *x* + *y* + 3;

c) *x*² = 15 + *y*²;

d) *x*² + *y*² = *x* + *y* + 2;

e) 3*x* + 5*y* = *xy*.

12. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах?

a) *x*² − 7*y* = 10;

b) *x*² + *y*² = 4*z* − 1;

c) 15*x*² − 7*y*² = 9;

d) *x*² + *y*² = 20102010.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*В. Серпинский, О решении уравнений в целых числах.*

*Н. В. Горбачев «Сборник олимпиадных задач по математике», пункт 12.*

***Индукция.***

 Метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для n = 1 верно, что ...», «Для n = 2 верно, что...» и т. д.

 Первое утверждение цепочки называется *базой* (или основанием) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается *шаг индукции*: «Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером (n+1)». Шаг

индукции также можно рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2», «Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т. д.

 Если верна база индукции, и верен шаг индукции, то все утверждения верны (это *принцип математической индукции*).

 Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на все предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: «Если верны все утверждения с номерами от 1 до n, то верно утверждение с номером (n + 1)».

 Бывает удобен *индуктивный спуск* — если утверждение с номером n (n > 1) можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и первое утверждение верно, то все утверждения верны.

 **Пример 1.** Докажите, что число состоящее из 243 единиц, делится на 243.

 *Решение.* Заметим, что 243 = 35 . Попробуем доказать более общее утверждение, что число, составленное из 3n единиц, делится на 3n. Оказывается, это проще.

 Для n = 1 утверждение верно (111 делится на 3).

 Заметим, что 111111111 = 111 · 1001001, и вообще число из 3n единиц разлагается на множители:

 ·10...010...01

причём, второй множитель делится на 3 (по признаку делимости на 3). Итак, в последовательности чисел 111, 111111111, ..., «3n единиц» каждое следующее равно предыдущему, умноженному на число, кратное трём. Поэтому, если делится на 3n−1 , то делится на 3n. Теперь индукция очевидна.

 *Замечание.* Мы специально не произносили слов «база индукции» и «шаг индукции », чтобы не отвлекать внимание от более существенных моментов.

 **Пример 2.** На плоскости провели несколько прямых и окружностей. Докажите, что части, на которые разбита плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние части (граничащие по отрезку или дуге) были покрашены в разные цвета.

 *Решение.* Сначала сотрём все прямые и окружности, но запомним, где они находились. Покрасим всю плоскость в один цвет, а потом будем восстанавливать границы, перекрашивая при этом части, на которые они делят плоскость. Каждый раз, добавляя прямую, мы перекрашиваем в противоположный цвет все части, лежащие по одну её сторону, и оставляем без изменения части, лежащие по другую сторону. Добавляя окружность, мы перекрашиваем все части, лежащие внутри неё, и оставляем без изменения, лежащие снаружи. Таким образом, каждый участок любой из нарисованных линий будет являться границей двух областей разного цвета.

**Типовые задачи**

 1. Докажите неравенство: 2n > n.

 2. Известно, что x + 1/x целое число. Докажите, что xn + 1/(xn) — также целое при любом целом n.

 3. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16×16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на "уголки" из трёх клеток. Придумайте обобщение этой задачи.

 4. (Игра "Ханойская башня") Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

 а) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

 б) это можно сделать за 2n−1 перекладываний.

 5. Ваня нарисовал на плоскости треугольник. Сережа провел *n* прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

 6. В Математической стране 100 городов. Любые два города соединены напрямую либо автодорогой, либо подземной дорогой. Докажите, что или из любого города в любой можно проехать на автомобиле, или из любого города в любой можно добраться на метро.

 7. Есть очень много трех- и пятикопеечных монет. Какую сумму можно ими заплатить? (найдите все варианты и докажите, что других нет).

 8. Докажите, что при любых натуральных n выполняется равенство:

 1+3+5+…+(2n−1)=n2.

 9. Докажите, что любое число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (т.е. перевести его в двоичную систему счисления).

 10. В концах диаметра окружности стоят единицы. На первом шаге каждая из получившихся дуг делится пополам, и в её середине пишется сумма чисел, стоящих в концах. Затем то же самое делается с каждой из четырёх полученных дуг и т.д. Такая операция проделывается n раз. Найти сумму всех полученных чисел.

 11. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Докажите, что эту картинку можно обвести "одним росчерком", то нарисовать карандашом, не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки, глава 9. Индукция*

*Александр Шень. Математическая индукция.*

**ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3**

**Задача 1.**

 Доказать, что числа 7*n* + 3 и 5*n* + 2 взаимно просты при любом натуральном *n*.

**Задача 2.**

Найдите все целые решения уравнений:

а); г);

б); д)

в);

**Задача 3.**

Решите в целых числах уравнение .

**Задача 4.**

Докажите тождество: 12 + 22 +...+ *n*2 =

**Задача 5.**

Известно, что – целое число. Докажите, что – также целое при любом целом *n*.

**Критерии оценивания.**

**Задача 1.**

Правильное решение – 5 баллов.

**Задача 2.**

За каждый правильно решённый пункт задания по одному баллу. Всего – 5 баллов.

**Задача 3.**

Правильное решение – 5 баллов.

**Задача 4.**

Правильное решение – 5 баллов.

**Задача 5.**

Правильное решение – 5 баллов.

**Максимальное количество баллов – 25.**