Министерство образования, науки и молодёжной политики

Краснодарского края

Государственное бюджетное учреждение

дополнительного образования

Краснодарского края «Центр развития одарённости»

**Методические рекомендации к выполнению контрольной работы № 1 по математике для учащихся 6 класса заочных курсов «Юниор» очно-заочного обучения (с применением дистанционного образовательных технологий и электронного обучения)**

Составитель:

Кузнецов Егор Александрович,

преподаватель ФГБОУ ВО «КубГУ»

Краснодар

2019

**Аннотация.**

Данная методическая разработка является сборником контрольных работ и методических рекомендаций по их проведению для реализации дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (6 класс)». Сборник направлен на развитие интеллектуальных умений учащихся на основе формирования у ребенка умений управлять процессами творчества: фантазированием, пониманием закономерностей, решением сложных проблемных ситуаций.

**Пояснительная записка.**

Программа «Курс математики для начинающего олимпиадника (6 класс)» разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 года, №1897, с изменениями), федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования (приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 года, № 413 с изменениями), методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (письмо Минобрнауки РФ от 18.11.2015 № 09-32-42).

***Введение.***

**Актуальность**

Проблема работы с одаренными учащимися чрезвычайно актуальна длясовременного российского общества. К школе предъявляются сегодня высокие требования. Именно поэтому так важно определить основные задачи и направления работы с одаренными детьми в системе дополнительного образования.

Одаренность — это системное, развивающееся в течение жизни качество психики, которое определяет возможность достижения человеком более высоких (необычных, незаурядных) результатов в одном или нескольких видах деятельности по сравнению с другими людьми.

Никакого особого «рецепта» по работе с одаренными детьми нет. По своей природной сути большинство детей талантливы. Беда в том, что не все из них об этом знают. Проблема «нераскрытости» детей заключается в том, что воспитание в семье не всегда помогает раскрыться личности ребенка, а система образовательного процесса в школе не позволяет «рассмотреть» особенности каждого ребенка. Учебный процесс в общеобразовательной школе предполагает, что ребенок должен соответствовать стандарту тех требований, которые к нему предъявляются. Таким образом, многогранность

и сложность явления одаренности определяет целесообразность существования разнообразных направлений, форм и методов работы с одаренными детьми.

Актуальность методической разработки определяется потребностью со стороны одарённых школьников на программы изучения математики, учебно-методические условия для реализации которых имеются на базе факультета математики и компьютерных наук КубГУ.

**Новизна:**

Характерной особенностью программы «Курс математики для начинающего олимпиадника (6 класс)» является интеграция основного и дополнительного образования. Новизна дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы состоит в том, что талантливые обучающиеся вовлекаются в учебную деятельность, основываясь не на традиционных школьных учебных методах работы, а на методах классического университетского образования, более соответствующего запросам учеников. Также содержание программы позволяет не только углубить интеллектуальные познания учеников, но и расширить и дополнить процесс их гражданского воспитания. При этом приоритет программы отдается развитию у учащихся знаний и навыков, позволяющих успешно выступать на муниципальном, региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике.

**Цель:**

Целью данной методической разработки является обеспечение подготовки школьников к участию в олимпиадном движении по предмету Математика и углубленное изучение курса математики.

***Основная часть***

**ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1**

**Задача 1.**

Что больше: сумма всех нечётных чисел от 1 до 2020 или сумма всех чётных чисел от 1 до 2020? На сколько?

**Задача 2.**

Двое по очереди расставляют цифры (возможно, повторяющиеся) в таблицу 1x101. Если получившееся число, состоящие из 101 цифры, делится на а) 9 б) 11, то выигрывает первый игрок, иначе выигрывает второй. Кто выиграет при правильной игре?

**Задача 3.**

В Карибском море плавают пираньи и барракуды. В понедельник каждая пиранья съела ровно по одной барракуде. Во вторник каждая выжившая барракуда съела ровно по одной пиранье. В среду опять каждая оставшаяся в живых пиранья съела по одной барракуде. Так продолжалось до воскресенья. В воскресенье последняя пиранья съела последнюю барракуду и осталась единственной рыбой во всем Карибском море. А сколько рыб было там первоначально?

**Задача 4.**

Докажите, что число, имеющее нечётное число делителей, является точным квадратом.

**Задача 5.**

На доске написаны числа

 а) 1, 2, 3, ..., 2017, 2018;

 б) 1, 2, 3, ..., 2018, 2019;

 в) 1, 2, 3, ..., 2019, 2020.

Разрешается стереть с доски любые два числа, заменив их разностью большего и меньшего. Можно ли, выполнив эту операцию много раз. получить на доске единственное число – 0? Если да, то как это сделать?

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ**

***Базовые идеи и методы решения задач****.*

Данная тема призвана познакомить учащихся с общими принципами и методами решения математических задач: рассмотрение частных случаев, разбиение на подзадачи, обобщение задачи, сведение задачи к более простой, изменение формулировки условия и т. д.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О.Бугаенко.– 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 c.*

***Четность.***

Многие задачи легко решаются, если заметить, что некоторая величина имеет определённую чётность. Из этого следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую чётность, невозможны. Иногда эту величину (функцию) надо сконструировать, например, рассмотреть чётность суммы или произведения, разбить объекты на пары, заметить чередование состояний, раскрасить объекты в два цвета. Чётность в играх – это возможность сохранить чётность некоторой величины при своем ходе.

**Пример 1.** Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

*Решение.* Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку, количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, поэтому общее количество прыжков чётно.

**Пример 2.** Существует ли замкнутая 7-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

*Решение.* Допустим, что существует. Тогда пересекающиеся звенья образуют пары. Следовательно, количество звеньев должно быть чётным. Противоречие.

**Пример 3.** У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

*Решение.* Назовём марсиан с чётным числом рук чётными, а с нечётным — нечётными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук чётно. Общее число рук у чётных марсиан чётно, поэтому общее число рук у нечётных марсиан тоже чётно. Следовательно, число нечётных марсиан чётно.

**Типовые задачи**

 1 . Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей ?

 2. Девять шестеренок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей и т. д. , девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестеренок n?

 3. В ряд стоят 100 фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

 4. Даны 6 чисел: 1 , 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?

 5. Все кости домино выложили в цепочку по правила игры. На одном конце оказалась пятёрка. Что может оказаться на другом конце?

 6. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?

 7. На столе стоят 7 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

 8. В языке дикарей хотийцев всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «ыу» или «ууыы» и добавления в любом месте звуков «уы» . Означают ли одно и то же слова «уыу» и «ыуы» ?

 9. На доске написаны числа 1 , 2, . . . , 101 . Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.

 10. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90◦. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

 11 . В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину квадрата?

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки*

*Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике*

***Анализ с конца.***

Задачи данного раздела подразумевают поиск значений неизвестных величин по известным операциям и результату.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Спивак А. В. Математический кружок. 6-7 классы.*

*Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. Д. А. Коробицын, Г. К. Жуков. — М.: МГУ, 2015.*

***Делимость.***

Большинство нестандартных задач для средних классов сводится к основной теореме арифметики – любое число можно разложить на простые сомножители, причём единственным образом. В рамках данного раздела также рассматриваются признаки делимости, остатки, сравнения по модулю.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки*

*Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике*

*Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи*

***Пары и чередования.***

Задачи данного типа ориентированы на выявление свойств и закономерностей объектов и отношений, связанных с чередованием.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. Д. А. Коробицын, Г. К. Жуков. — М.: МГУ, 2015.*

*Спивак А. В. Математический кружок. 6-7 классы.*

***Логические задачи.***

Задачи данного типа можно разделить на два подраздела: сюжетные логические задачи и задачи на истинные и ложные логические высказывания. Задачи первого подраздела содержат набор утверждений, по которым требуется полностью восстановить описываемое в условиях явление / ситуацию / процесс. Задачи из второго подраздела также содержат набор утверждений, истинность или ложность которых и предлагается установить.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Богомолова О.Б. Логические задачи*

*Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике*

***Принцип крайнего.***

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай. В задачах на метод крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно ещё уменьшить, то получится искомое противоречие.

**Типовые задачи**

1. Дано 2019 чисел. Сумма любых 5 из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.
2. Среди учащихся Малого Матфака прошли соревнования по перетягиванию каната, в результате которого все оказались занесены в список по убыванию силы. Было решено проверить, смогут ли любые трое перетянуть любых двоих. За какое наименьшее число перетягиваний он может это установить?
3. Сколькими способами можно расставить в ряд числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?
4. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что по крайней мере одна из них бьёт не более двух других.
5. Несколько гангстеров сидят за круглым столом и делят награбленное, причём доля каждого составляет ровно половину от суммы долей его соседей справа и слева. Докажите, что всем денег достанется поровну.
6. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из этих 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?
7. Ночью на городской площади собралось 2019 гангстеров. Они не смогли мирно договориться, и каждый из них выстрелил в ближайшего к нему гангстера. Все они выстрелили одновременно, все попарные расстояния между гангстерами различны. Докажите, что не все гангстеры будут убиты.
8. Доказать, что шахматную доску 4х4 клетки нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку.
9. 200 солдат выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий солдат, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий солдат, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше?
10. На предвыборном собрании выступали кандидаты в депутаты. Через какое-то время первый кандидат сказал: «До этого момента здесь прозвучало ровно одно неверное утверждение». «А теперь два», - сказал второй. «А теперь три», - произнес третий и так далее. Наконец, 12-й сказал, что прозвучало ровно 12 неверных утверждений. Сколько раз соврали за время собрания, если известно, что по крайней мере одно из этих высказываний правдиво?
11. 7 грибников собрали вместе 59 грибов, причем никакие двое не собрали поровну. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.
12. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?
13. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?

б) При каком наименьшем n числа от 1 до n можно выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?

14. По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.

15. Назовём автобусный билет (c шестизначным номером) счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

16. В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.)

17. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

18. На столе лежат произвольные монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.

19. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.

20. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О.Бугаенко.– 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 c.*

*Спивак А. В. Математический кружок. 6-7 классы.*

***Площадь.***

Задачи данного раздела посвящены, вопросам вычисления площадей различных фигур.

**Рекомендуемые материалы для закрепления раздела:**

*Спивак А. В. Математический кружок. 6-7 классы.*

*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки*