ММ ФМКН КубГУ, 19.05.19

**Игры**

Под понятием *математической игры* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией*, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики-нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада или результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и *ничейной стратегии*, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Например крестики-нолики (на доске 3 × 3) являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия (либо выигрышная, либо ничейная) в этих играх существует, она не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

*Соответствие.* Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

*Решение с конца.* Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция являются выигрышной, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из неё ведёт к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

*Передача хода.* Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

1. Есть куча из *n* спичек. Разрешается брать от 1 до 10 спичек, выигрывает взявший последнюю спичку. При каких *n* выигрывает начинающий?

2. Первый называет целое число, затем второй называет ещё одно. Если сумма чисел чётна, выигрывает первый, если нечётна - второй. Кто выигрывает при правильной игре?

3. (Продолжение) Тот же вопрос, если вместо суммы берут произведение чисел. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Дан выпуклый n-угольник. Игроки по очереди проводят в нём диагонали, не пересекая проведённых ранее (во внутренних точках). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. (Это случится, когда многоугольник будет разрезан на треугольники.)

5. Шоколадка представляет собой прямоугольник 5 × 8, разделённый углублениями на 40 квадратиков. Двое по очереди разламывают её на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (больший одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает.

6. В крайних клетках полоски 1 × 20 стоят белая и чёрная шашки. Двое по очереди передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Двое игроков пишут двадцатизначное число слева направо, по очереди приписывая к нему по одной цифре. Первый игрок выигрывает, если полученное число не делится на 7, второй - если делится.

8. Что будет, если в предыдущей игре заменить 7 на 13?

9. На доске написано число 60. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Если при этом получается нуль, игрок проиграл.

10. Двое играют в такую игру. Первый называет любое натуральное число от 2 до 9, второй умножает его на любое натуральное число от 2 до 9, первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и т.д. Выигрывает тот, у кого впервые получится число больше 1000.

11. На столе лежат две кучки спичек. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек (1;2;3;…) из одной из кучек (по выбору игрока). При этом не разрешается оставлять поровну спичек в кучках (за исключением случая, когда спичек не осталось вовсе). Кто не может сделать ход, проигрывает.

12. Часы показывают полдень. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на два или три часа вперёд. Если после хода игрока стрелка указывает на 6, он выиграл.

13. Есть две кучки конфет по m и n конфет (числа m и n - целые положительные). Игроки ходят по очереди. Делая ход, игрок съедает все конфеты из одной кучки, а другую кучку делит на две (по своему выбору; в каждой из них должно остаться хотя бы по конфете). Если сделать ход нельзя (это бывает, когда в обеих кучках по одной конфете), он проиграл.

14. Игра Ним. На столе лежат несколько кучек камней. Двое играющих поочерёдно берут камни из этих кучек. За один ход можно взять любое число камней, но только из одной кучки. Кто не может сделать ход, проигрывает (другими словами, выигрывает тот, кто заберёт последний камень).

15. Двое игроков кладут одинаковые круглые монеты на прямоугольный стол; монеты могут свешиваться за край (но не должны падать) и не могут перекрываться. Кто не может положить монету, проигрывает. (Сдвигать ранее положенные монеты нельзя.)

16. На квадратную доску 8 × 8 двое по очереди ставят коней на поля, не находящиеся под боем ранее поставленных (все равно кем) коней. Кто выигрывает при правильной игре - первый или второй?

17. В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс; выигрывает переправивший последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?

18. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).