ММ ФМКН КубГУ, 22.04.19

**Покрытия, упаковки и замощения. Раскраски.**

1. Из прямоугольников размером 1×3 клеток составили прямоугольник. Докажите, что хотя бы одна из длин его сторон кратна 3.

2. Существует ли четырехугольник, который можно разрезать двумя прямыми на 6 кусков?

3. а) На какое наибольшее число частей можно разрезать блин тремя взмахами ножа?

 б) А на какое наибольшее число частей можно теми же тремя разрезами разделить каравай?

4. В клетчатом квадрате 64\*64 вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть квадрата можно разрезать на уголки из трех клеток.

5. Можно ли покрыть равносторонний треугольник двумя равносторонними треугольниками меньшего размера?

6. Квадратный каток надо осветить четырьмя прожекторами, висящими на одной высоте. Каков наименьший радиус освещённых кругов?

7. Можно ли точечный источник света на плоскости заслонить тремя кругами (чтобы любой луч, выходящий из источника, пересекал хотя бы один круг)?

8. Пол в прямоугольной комнате 6 × 3кв. м покрыт квадратными коврами разных размеров, края которых параллельны стенам. Докажите, что можно убрать несколько ковров так, чтобы оставшиеся ковры покрывали более 2кв. м.

9. Из шахматной доски вырезали две угловые клетки на диагонали. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть доминошками из двух клеток?

10. В каждой клетке доски 5×5 клеток сидит жук. По хлопку все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

11. Два друга Петя и Вася поспорили:

 — Я могу любую карту так раскрасить в три цвета, чтобы любые государства с общей границей были покрашены в разные цвета, — заявил Петя.

 — Я могу нарисовать карту, которую ты так раскрасить не сможешь1, — ответил Вася.

 Кто из друзей прав?

12. Какое наибольшее число полосок 4×1 поместится (без наложений) в квадрате 10×10?

13. У Пети есть n³ белых кубиков 1×1×1. Он хочет сложить из них куб n×n×n, снаружи полностью белый. Какое наименьшее число граней кубиков должен закрасить Вася, чтобы помешать Пете? Решите задачу при a) n = 2; б) n = 3.