ММ ФМКН КубГУ, 24.03.19

**Алгоритм Евклида**

Алгоритм Евклида позволяет находить наибольший общий делитель чисел, решать линейные уравнения в целых числах. Алгоритм основан на следующем факте: «*Если при делении числа a на b получается остаток r, то* НОД(*a*;*b*) = НОД(*b*;*r*)».

Применение алгоритма Евклида заключается в последовательном делении с остатком. Сначала мы делим большее из двух чисел на меньшее. На каждом следующем шагу мы делим число, которое на предыдущем шагу было делителем, на число, которое на предыдущем шагу было остатком. Так поступаем до тех пор, пока не получим нулевой остаток. Это обязательно произойдёт через конечное число шагов, поскольку остатки всё время уменьшаются. Последний ненулевой остаток и будет наибольшим общим делителем исходных чисел.

Отметим, что этот алгоритм может быть применён для нахождения наибольшего общего делителя не только чисел, но также многочленов и других объектов более общей природы.

**Задачи**

1. Докажите, что НОД не меняется при замене пары (*a*, *b*) на пару (*a*, *b* + *ka*) (для любого целого числа *k*).
2. Найдите а) НОД (*n*, *n*+ 1); б) НОД (*n*, *n*+ 2); в) НОД (*n*+ 1, *n*2).
3. Чему может быть равен НОД (*x+y*, *x−y*), если НОД (*x, y*) = 1?
4. Найдите НОД (2100 – 1, 2120 – 1).
5. Найдите а) НОД (6188, 4709); б) НОД (1597, 2584);в) НОД (*x*n−1, *x*m−1).
6. Обозначим через *Fn n*-ое число Леонардо Пизанского (более известные как **числа Фибоначчи**), т.е. *F1* = 1, *F2* = 1, а для каждого *n* ≥ 3 число *Fn* вычисляется по формуле *Fn* = *Fn − 1* + *Fn − 2*. Докажите, что (*Fn*, *Fn − 1*) = 1.
7. Докажите, что дробь несократима ни при каком натуральном *n*.
8. Пусть необходимо определить наибольший общий делитель двух натуральных чисел *a = r0* и *b = r1*, *r0 > r1*. Произведем несколько делений с остатком:

*r0 = q1 · r1 + r2*;

*r1 = q2 · r2 + r3*;

...

*ri = qi + 1 · ri + 1 + ri + 2*;

...

*rn = qn + 1 · rn + 1 + rn + 2,* где *rn + 2* = 0.

Тогда согласно алгоритму Евклида НОД(*r0, r1*) = *rn + 1*.

Докажите, что все числа *r*0, *r*1, *r*2, ..., *rn*, *rn* + 1 можно представить в виде   
*m · a + n · b* для некоторых целых *m* и *n*.

*Замечание.* Следствием из предыдущей задачи является **теорема о линейном представлении НОД**: пусть *d = (a, b)*, тогда существуют такие целые *m* и *n*, что *m · a + n · b = d.*

1. Найдите наибольший общий делитель чисел 34 и 55, используя алгоритм Евклида. С помощью алгоритма Евклида найдите линейное представление НОД чисел 34 и 55.
2. Хулиган Ваня отобрал у милой девочки Маши открытку размерами *m × n* сантиметров и начал ее резать. Каждый раз он отрезает от открытки квадрат с максимально возможной стороной. Преподаватель отобрал у хулигана Вани остаток открытки, который имеет форму квадрата. С какой стороной?
3. Решите уравнение в натуральных числах 7x − 11y = 1.
4. На прямой, в точке 0, сидит блоха. Каждый момент времени она прыгает в любом направлении (взад и вперед) на 2010 или 1447. В каких точках она может оказаться?
5. Руководство Малого Матфака выпустило в обращение купюры достоинством 65 и 999 ммфников. a) Докажите, что этими купюрами можно заплатить любую сумму денег (возможно, со сдачей). b) Докажите, что любую сумму большую 1 000 000 ммфников можно заплатить этими купюрами без сдачи.