ММ ФМКН КубГУ, 26.03.19

**Алгоритм Евклида**

Алгоритм Евклида позволяет находить наибольший общий делитель чисел, решать линейные уравнения в целых числах. Алгоритм основан на следующем факте: «*Если при делении числа a на b получается остаток r, то* НОД(*a*;*b*) = НОД(*b*;*r*)».

Применение алгоритма Евклида заключается в последовательном делении с остатком. Сначала мы делим большее из двух чисел на меньшее. На каждом следующем шагу мы делим число, которое на предыдущем шагу было делителем, на число, которое на предыдущем шагу было остатком. Так поступаем до тех пор, пока не получим нулевой остаток. Это обязательно произойдёт через конечное число шагов, поскольку остатки всё время уменьшаются. Последний ненулевой остаток и будет наибольшим общим делителем исходных чисел.

Отметим, что этот алгоритм может быть применён для нахождения наибольшего общего делителя не только чисел, но также многочленов и других объектов более общей природы.

**Задачи**

1. Найдите НОД(2019, 1001)
2. Найти наибольший общий делитель чисел  2*n* + 13  и  *n* + 7.
3. Найдите  НОД(111...111, 11...11)  – в записи первого числа 100 единиц, в записи второго – 60.
4. Найдите  НОД(111...111, 11...11)  – в записи первого числа *m* единиц, в записи второго – *n*.
5. На прямой сидит блоха, и прыгает всякий раз либо на 15 сантиметров вправо, либо на 21 сантиметр влево. В каких точках прямой может побывать эта блоха?
6. **Определение.** Даны натуральные числа *a* и *b*. Назовем число *m* линейно представимым через *a* и *b*, если существуют целые числа *x* и *y*, такие, что *m = ax + by*.

Докажите, что

1. если *m*1 и *m*2 линейно представимы через *a* и *b*, то *m*1 + *m*2 и *m*1 − *m*2 также линейно представимы через *a* и *b*;

б) если *m* линейно представимо через *a* и *b*, то *km* линейно представимо через *a* и *b* для любого целого *k*;

в) НОД(*a*, *b*) линейно представим через *a* и *b*;

г) число *m* линейно представимо через *a* и *b* тогда и только тогда, когда оно делится на НОД(*a, b*).

9. НОД(*a, b*) = *d*. Докажите, что НОД(2*a* − 1, 2*b* − 1) = 2*d* − 1.

10. Найдите НОД(235 + 1, 2100 + 1).

**Определение.** Если НОД(*a*, *b*) = 1, то числа *a* и *b* называются взаимно простыми.

11. В государстве имеют хождение монеты достоинством *a* и *b* золотых, где *a* и *b* — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

а) покупатель может заплатить в магазине любую сумму в целое число золотых (возможно, получив сдачу), при условии, что и у покупателя, и у продавца имеется достаточно большой запас монет каждого достоинства.

б) такими монетами можно набрать (без сдачи) любую сумму, начиная с 2*ab* золотых.

в) найдите наибольшее число золотых, которое нельзя набрать такими монетами.

12. Пусть *a* и *b* — взаимно простые натуральные числа. В доме есть лифт с двумя кнопками, одна из которых поднимает лифт на *a* этажей вверх, а вторая опускает на *b* этажей вниз, если это возможно (например, на последнем этаже первая кнопка не работает). Докажите, что на этом лифте можно попасть с любого этажа на любой другой, если высота дома не меньше а) 2*ab*; б) *a* + *b*.