ММ ФМКН КубГУ, 03.03.19

**Метод крайнего**

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай. Поэтому полезно сразу рассматривать особые, крайние объекты.

В задачах на метод крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно ещё уменьшить, то получится искомое противоречие.

**Пример 1.** Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

*Решение.* Выберем прямую и рассмотрим точки пересечения других прямых между собой. Среди этих точек пересечения выберем ближайшую к нашей прямой. Две прямые, проходящие через эту точку, пересекают исходную прямую и образуют с ней треугольник. Этот треугольник не могут пересекать другие прямые (подумайте, почему).

**Пример 2.** Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

*Решение.* Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Обозначим эту грань G, число её сторон n. К каждой стороне G примыкает грань многогранника, всего примыкающих граней n. Число сторон у каждой грани заключено между 3 и n − 1, всего n − 3 возможности. Поскольку число возможностей меньше числа примыкающих граней, то по принципу Дирихле (см. тему «Принцип Дирихле») одна из возможностей повторится. Таким образом, среди граней, примыкающих к грани G, найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

**Пример 3.** В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

*Решение.* Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно своим соседям. Поскольку любые два числа соединяются цепочкой соседних чисел, все числа равны.

**Пример 4.** Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

*Указание.* Рассмотрите ближайшую точку границы.

**Пример 5.** Докажите, что число $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+…+\frac{1}{n}$ не является целым.

*Указание.* Рассмотрите максимальную из степеней двойки, входящих в знаменатели слагаемых.

 **Задачи**

1. Дано 2019 чисел. Сумма любых 5 из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.
2. Среди учащихся Малого Матфака прошли соревнования по перетягиванию каната, в результате которого все оказались занесены в список по убыванию силы. Было решено проверить, смогут ли любые трое перетянуть любых двоих. За какое наименьшее число перетягиваний он может это установить?
3. Сколькими способами можно расставить в ряд числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?
4. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что по крайней мере одна из них бьёт не более двух других.
5. Несколько гангстеров сидят за круглым столом и делят награбленное, причём доля каждого составляет ровно половину от суммы долей его соседей справа и слева. Докажите, что всем денег достанется поровну.
6. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из этих 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?
7. Ночью на городской площади собралось 2019 гангстеров. Они не смогли мирно договориться, и каждый из них выстрелил в ближайшего к нему гангстера. Все они выстрелили одновременно, все попарные расстояния между гангстерами различны. Докажите, что не все гангстеры будут убиты.
8. Доказать, что шахматную доску 4х4 клетки нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку.
9. 200 солдат выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий солдат, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий солдат, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше?
10. На предвыборном собрании выступали кандидаты в депутаты. Через какое-то время первый кандидат сказал: «До этого момента здесь прозвучало ровно одно неверное утверждение». «А теперь два», - сказал второй. «А теперь три», - произнес третий и так далее. Наконец, 12-й сказал, что прозвучало ровно 12 неверных утверждений. Сколько раз соврали за время собрания, если известно, что по крайней мере одно из этих высказываний правдиво?
11. 7 грибников собрали вместе 59 грибов, причем никакие двое не собрали поровну. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.
12. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?
13. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?

б) При каком наименьшем n числа от 1 до n можно выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?

14. По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.

15. Назовём автобусный билет (c шестизначным номером) счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

16. В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.)

17. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

18. На столе лежат произвольные монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.

19. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.

20. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

**Рассмотрение ситуации в асимптотике.**

Методу крайнего родственны рассмотрение ситуации на бесконечности (в асимптотике) и метод малых шевелений.

**Пример 1.** На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

*Идея решения.* Выберем направление, не перпендикулярное ни одной из прямых. Будем двигать по этому направлению точку с единичной скоростью. Скорость удаления этой точки относительно любой отмеченной точки стремится к единице, а скорость её удаления относительно любой отмеченной прямой меньше единицы.

**Пример 2.** Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь *S* > 1. Докажите, что её можно сдвинуть на целочисленный вектор так, чтобы исходная фигура и её образ пересекались.

*Решение.* Пусть расстояние между любыми двумя точками фигуры не превосходит *d*. Рассмотрим сдвиги нашей фигуры на всевозможные целочисленные векторы. Нарисуем на плоскости два квадрата с общим центром и сторонами, параллельными координатным осям | один со стороной *l*, а другой | со стороной *l+*2*d* (значение *l* мы определим позже, оно должно быть достаточно велико). Большой квадрат «окаймляет» малый, ширина «каймы» равна *d*. Поэтому любой из рассматриваемых образов фигуры, пересекающий малый квадрат, целиком лежит внутри большого. Левый нижний угол маленького квадрата расположим так, чтобы он принадлежал рассматриваемой фигуре.

Оценим площадь фигур, пересекающих малый квадрат. Таких фигур не меньше *l*2 , так как сдвиги на векторы вида (*m*;*n*) ($0\leq m<l, 0\leq n<l$) переводят левый нижний угол квадрата в точку внутри квадрата, а таких сдвигов всего имеется ([*l*]+1)2> *l*2 . Если предположить, что образы фигуры не пересекаются, то их суммарная площадь должна не превосходить площади большого квадрата. Получаем неравенство

*Sl*2 $\leq (l+2d)$2

или

(*S* − 1)*l*2 − 4*dl* − 4*d*2 $\leq $ 0.

В левой части последнего неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно l со старшим коэффициентом большим нуля. При достаточно больших l он принимает положительные значения (его график | парабола с ветвями вверх). Значит, можно подобрать такое l, при котором последнее неравенство не будет выполняться. Поэтому предположение, что образы нашей фигуры не пересекаются приводит к противоречию.

Так как два образа рассматриваемой фигуры при сдвигах на целочисленные векторы пересекаются, то при сдвиге исходной фигуры на разность этих векторов получим фигуру, пересекающую её.

**Пример 3.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде *x*2 +*y*3 , где *x* и *y* – натуральные числа.

*Решение.* Рассмотрим натуральное число *N* и оценим, какое количество чисел, не превосходящих его, может быть представлена в указанном виде. Очевидно, что число *x* в таком представлении должно не превосходить $\sqrt{N}$, а *y* – не превосходить $\sqrt[3]{N}$. Количество всевозможных таких пар (*x*;*y*) не больше $\sqrt{N}\sqrt[3]{N}=N^{\frac{5}{6}}$. Поэтому и количество представимых чисел не больше этой величины. Значит, среди чисел, не превосходящих *N*, доля тех, которые представимы в указанном виде, не превосходит $\frac{N^{\frac{5}{6}}}{N}=\frac{1}{\sqrt[6]{N}}$. При достаточно больших *N* она будет сколь угодно мала.

**Задачи**

15. Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом «внутренностей парабол». (Под внутренностью параболы мы понимаем выпуклую фигуру, границей которой является парабола.)

16. Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в целых точках, не содержащего внутри и на границе других целых точек, равна единице.

17. Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь S >10. Докажите, что её можно параллельно перенести так, чтобы она покрыла не менее 11 целых точек.

18 (лемма Минковского). Докажите, что центрально-симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади больше 4 содержит ещё хотя бы одну целую точку.

*Указание.* Произведите гомотетию с коэффициентом 1/2 и воспользуйтесь результатом примера 2.

19. Прямая пересекает замкнутую ломаную в 1995 точках. Докажите, что некоторая прямая, не параллельная ни одному звену ломаной, пересекает её не более чем в 1995 точках.

20. Проведены 100 хорд одной окружности, любые две из них пересекаются. Всегда ли можно провести ещё одну хорду так, чтобы она пересекала их все?

21. Докажите, что если натуральные числа *k*1, *k*2, ..., *k*s таковы, что

$\frac{1}{k\_{1}}+\frac{1}{k\_{2}}+…+\frac{1}{k\_{s}}<1$,

то существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $n\_{1}^{k\_{1}}+n\_{2}^{k\_{2}}+…+n\_{s}^{k\_{s}}$ для некоторых

целых неотрицательных чисел *n*1 , *n*2 , ..., *n*s .

22. Докажите, что для любого натурального числа *n* существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы *n* слагаемых, каждое из которых является *n*-й степенью натурального числа.