ММ ФМКН КубГУ, 03.03.19

**Метод крайнего**

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай. Поэтому полезно сразу рассматривать особые, крайние объекты.

В задачах на метод крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно ещё уменьшить, то получится искомое противоречие.

**Пример 1.** Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

*Решение.* Выберем прямую и рассмотрим точки пересечения других прямых между собой. Среди этих точек пересечения выберем ближайшую к нашей прямой. Две прямые, проходящие через эту точку, пересекают исходную прямую и образуют с ней треугольник. Этот треугольник не могут пересекать другие прямые (подумайте, почему).

**Пример 2.** Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

*Решение.* Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Обозначим эту грань G, число её сторон n. К каждой стороне G примыкает грань многогранника, всего примыкающих граней n. Число сторон у каждой грани заключено между 3 и n − 1, всего n − 3 возможности. Поскольку число возможностей меньше числа примыкающих граней, то по принципу Дирихле (см. тему «Принцип Дирихле») одна из возможностей повторится. Таким образом, среди граней, примыкающих к грани G, найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

**Пример 3.** В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

*Решение.* Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно своим соседям. Поскольку любые два числа соединяются цепочкой соседних чисел, все числа равны.

**Пример 4.** Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

*Указание.* Рассмотрите ближайшую точку границы.

**Пример 5.** Докажите, что число $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+…+\frac{1}{n}$ не является целым.

*Указание.* Рассмотрите максимальную из степеней двойки, входящих в знаменатели слагаемых.

 **Задачи**

1. Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?
2. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?
3. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?

б) При каком наименьшем n числа от 1 до n можно выписать в строчку так, чтобы модуль разности любых двух соседних чисел была не меньше 50?

1. По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.
2. Назовём автобусный билет (c шестизначным номером) счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?
3. В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.)
4. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.
5. На столе лежат произвольные монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.
6. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.
7. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.