ММ ФМКН КубГУ, 09.12.18

**Инварианты**

*Инвариант* — величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться *чётность* или *раскраска*. В задачах про сумму цифр используются остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* — величина, изменяющаяся только в одну сторону (т. е. которая может только увеличиваться или только уменьшаться). Понятие полуинварианта часто используется при доказательствах остановки процессов.

Пример 1. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

*Решение.* Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод — ананас, если число бананов было нечётным, то — банан.

Пример 2. В одной клетке квадратной таблицы 4 × 4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько

бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

*Решение.* Заменим знак «+» на число 1 и знак «−» на число −1. Заметим, что *произведение всех чисел в таблице* не меняется при смене знака у всех чисел столбца или строки. В начальном положении это произведение равно −1, а в

таблице из одних плюсов +1, чем и доказана невозможность перехода.

Пример 3. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

Решение. Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что чётность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой ситуации — нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

**Задачи**

1. Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля а1 на поле а8?

2. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 26 монет?

3. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

4. Набор (b1, …, b7) является перестановкой набора целых чисел (a1, …, a7). Докажите, что число (a1 − b1) · … · (a7 − b7) — чётное.

5. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2018. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число a + b + 1. Какое число может остаться на доске после 2017 таких операций?

6. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

7. На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке — по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке? А если чижей и ёлок семь?

8. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки и одна плитка 2×2 потерялась. Её заменили на плитку 1×4. Можно ли теперь замостить дно коробки?

9. В вершинах куба расставлены числа: 7 нулей и одна единица. За один ход разрешается прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными? А можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

10. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

11. Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

12. Числа от 1 до 19 расположены в порядке возрастания. Разрешается выбрать любые три стоящих подряд числа и переставить их циклически (то есть, если вначале было a, b, c, то стало b, c, a). Можно ли расположить числа в порядке убывания?