ММ ФМКН КубГУ, 12.12.18

**Инварианты**

*Инвариант* — величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться *чётность* или *раскраска*. В задачах про сумму цифр используются остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* — величина, изменяющаяся только в одну сторону (т. е. которая может только увеличиваться или только уменьшаться). Понятие полуинварианта часто используется при доказательствах остановки процессов.

Пример 1. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

*Решение.* Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод — ананас, если число бананов было нечётным, то — банан.

Пример 2. В одной клетке квадратной таблицы 4 × 4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько

бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

*Решение.* Заменим знак «+» на число 1 и знак «−» на число −1. Заметим, что *произведение всех чисел в таблице* не меняется при смене знака у всех чисел столбца или строки. В начальном положении это произведение равно −1, а в

таблице из одних плюсов +1, чем и доказана невозможность перехода.

Пример 3. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

Решение. Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что чётность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой ситуации — нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

**Задачи**

1. На доске написаны натуральные числа от 1 до 2019. Карлсон занимается тем, что каждую секунду стирает с доски какие-то два числа и пишет их разность. В конце концов у него осталось одно число. Могла ли это быть единица?

 2. Круг разделен на 6 секторов (см. рис.), в которых по порядку написаны числа от 1 до 6. За один ход разрешается добавить по единице к двум соседним числам. Можно ли через некоторое число шагов получить во всех секторах одинаковые числа?

3. Из шахматной доски вырезали центральный квадратик 2×2. Можно ли оставшуюся фигуру замостить фигурками тетрамино, используя каждую из пяти одинаковое число раз?

4. Можно ли шашечную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4?

5. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой

цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Может ли при этом получиться доска, у которой ровно одна черная клетка?

6. На доске записано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и записать вместо них одну цифру, отличную от стёртых. Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания.

7. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число ab + a + b. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

8. В колоде часть карт лежит «рубашкой вниз». Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат «рубашкой вниз», переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут «рубашкой вверх», как бы ни действовал Петя.

9. На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берет любой камень и переносит его вверх на ближайшую свободную ступеньку (т. е. если ближайшая ступенька свободна, то на неё, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500 и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди начинает Сизиф. Цель Сизифа положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?

10. Можно ли круг разрезать на несколько частей, из которых сложить квадрат?