ММ ФМКН КубГУ, 25.11.18

**Графы**

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними - линиями или стрелками. Такой способ представления называется *графом*. Например, схема метро - это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами*.

Вершину называют *чётной*, если из неё выходит чётное число рёбер и *нечётной* в противном случае. Граф называют *связным*, если между любыми вершинами существует путь, состоящий из рёбер графа, *ориентированным* - если на каждом ребре указано направление, *плоским* - если он нарисован на плоскости и его ребра не пересекаются (во внутренних точках).

При решении многих олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу рёбер графа:

1) если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (т. е. обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;

2) для всякого чётного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;

3) если в связном графе ровно две нечётные вершины, то существует правильный обход, причём в одной из них он начинается, а в другой - кончается;

4) в любом графе количество нечётных вершин чётно.

**Задачи**

1. Гарри Поттер умеет превращать жабу в принцессу, гриб в жабу и грушу, грушу в яблоко, огрызок от яблока в котёнка и ёжика, котёнка в грушу или яблоко, ёжика в грушу, а яблоко — только в огрызок. Сейчас у него есть яблоко. Сможет ли он превратить его в принцессу?

2. В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор — Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

4. В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

**Степень вершины** — количество ребер, выходящих из данной вершины.

5. В стране 1329 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?

6. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

7. Вася считает, что в его классе у всех разное число друзей-одноклассников. Не ошибается ли он?

8. Иван утверждает, что среди любых а) четырёх; б) пяти; в) шести человек обязательно найдётся либо трое знакомых друг с другом, либо трое незнакомых. Не завирается ли он?

9. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения.)

10. Докажите, что существует граф с 2n вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, ..., n, n.

11. Докажите, что не существует многогранника, у которого было бы ровно семь ребер.

12. Верно ли, что два графа изоморфны, если

а) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9?

б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3?

в) они связны, без циклов и содержат по 6 ребер?

13. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.