ММ ФМКН КубГУ, 26.11.18

**Домашнее задание**

**Графы**

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними - линиями или стрелками. Такой способ представления называется *графом*. Например, схема метро - это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами*.

Вершину называют *чётной*, если из неё выходит чётное число рёбер и *нечётной* в противном случае. Граф называют *связным*, если между любыми вершинами существует путь, состоящий из рёбер графа, *ориентированным* - если на каждом ребре указано направление, *плоским* - если он нарисован на плоскости и его ребра не пересекаются (во внутренних точках).

При решении многих олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу рёбер графа:

1) если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (т. е. обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;

2) для всякого чётного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;

3) если в связном графе ровно две нечётные вершины, то существует правильный обход, причём в одной из них он начинается, а в другой - кончается;

4) в любом графе количество нечётных вершин чётно.

Количество рёбер, выходящих из вершины, называется *степенью* этой вершины.

**Задачи**

1. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?



2. Жук ползёт по рёбрам а) тетраэдра (на рисунке слева), б) куба, в) октаэдра (на рисунке справа). Сможет ли он последовательно обойти все рёбра, проходя по каждому ребру ровно один раз?

 3. Можно ли, сделав несколько ходов конями из положения на рисунке слева, расположить их так, как показано на рисунке справа? (Выходить за пределы поля 3×3 не разрешается.)

4. а) Может ли в государстве, в котором из каждого города выходят 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

б) А может ли в государстве, в котором из каждого города выходят 5 дорог, быть ровно 100 дорог?

в) А может ли в государстве, в котором 100 городов из каждого города выходить 5 дорог?

5. Сколько диагоналей имеет правильный 2018-угольник?

6. Докажите, что в любом графе   
 а) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу рёбер (и следовательно, чётна);   
 б) число вершин нечётной степени чётно.

7. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

8. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

9. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

10. a) Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

b) Среди 17 человек любые два либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Докажите, что среди них найдутся либо трое друзей, либо трое врагов, либо трое незнакомых.