**Задания, решения и критерии оценивания зонального этапа олимпиады младших школьников по математике 5-8 классов**

**8 декабря 2015 г. Краснодарский край.**

**Общие принципы оценивания олимпиадных заданий по математике**

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, (либо отсутствует рассмотрение отдельных случаев). Решение может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Помимо этого обращаем внимание на следующее.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего верных продвижений в решении задачи;

г) при решении заданий математической олимпиады нужно не только записать ответ, но и объяснить, почему ответ в задаче именно такой. В частности, если в задаче требуется найти некоторую величину, то нужно найти все возможные её значения и доказать, что других значений она принимать не может.

д) если при решении задания не используется какое-либо условие данное в задании, то это эквивалентно тому, что решающий заявляет, что доказываемое утверждение справедливо и в более общей ситуации. В частности, если более общее утверждение оказывается не верным, то соответствующее рассуждение признается не верным.

**5 класс**

**1.** Из числа **123456789123456789123456789** вычеркните 15 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим из возможных. В ответе напишите это число.

**Решение.** После вычеркивания 15 цифр должно остаться 12-значное число. Очевидно, что если в старшем разряде можно с помощью вычеркиваний получить 9, то это надо сделать. Получить 9 в старшем разряде можно только вычеркиванием первых 8 цифр: ~~12345678~~9123456789123456789. Осталось вычеркнуть 15−8=7 цифр. Во втором слева разряде 9 получить вычеркиванием семи цифр нельзя, но можно получить 8, причем единственным способом – вычеркнув после 9 в старшем разряде 7 цифр: ~~12345678~~**9**~~1234567~~**89123456789**.

**Ответ:** 98123456789.

**Критерии:**

– вычеркнуто не 15 цифр ставить не более 3 баллов;

–цифры переставлены– 0 баллов;

–вычеркнуты первые 8 цифр и оставлена 9 в старшем разряде ответа – 3 балла;

– правильный ответ без пояснений – 7 баллов.

**2.** Куб со стороной 1 м распилили на одинаковые кубики со стороной 1 см, после чего их все выложили последовательно один за другим без пропусков в один прямолинейный ряд. Какой длины оказался этот ряд?

**Решение.** Из равенства 1м3 = 100×100×100 см3 следует, что маленьких кубиков всего 1000000. Значит, длина ряда будет 1000000 см.

**Ответ:** 1000000 см = 10000 м = 10 км.

**Критерии:**

– принимается ответ в любых единицах длины;

–длина правильно найдена, но имеется ошибка в преобразовании размерностей – 6 баллов;

–правильный ответ без пояснений – 4 балла.

**3.** На устной олимпиаде по математике участникам было задано по 12 вопросов каждому. За каждый верный ответ засчитывалось 5 очков, а за каждый неверный снималось 2 очка. Вася дал ответы на все 12 вопросов и получил 39 очков. Сколько из его ответов оказались ошибочными?

**Решение 1.** Если бы ответы на все 12 вопросов были бы правильными, то Вася получил бы 60 очков. Каждый неправильный ответ уменьшает суммарное количество очков на 7. Он получил на 21=3×7 очков меньше, чем максимально возможное количество. Следовательно, он дал 3 ошибочных ответа.

**Решение 2 (переборное).** Если бы ответы на все 12 вопросов были бы правильными, то Вася получил бы 60 очков. Если 11 правильных и 1 неверный, то Вася получи бы 11×5-2=53 очка. Если 10 правильных и 2 неверных, то 10×5-4=46 очков. Если 9 правильных и 3 неверных, то 9×5-6=39 очков (этот вариант подходит). Если 8 правильных и 4 неверных, то 8×5-8=32 очка. Если правильных будет меньше, а неправильных больше четырех, то количество полученных очков будет еще меньше. Единственный подходящий вариант: c тремя неверными ответами.

**Ответ:** 3.

**Критерии:**

–правильный ответ без пояснений – 3 балла;

–правильный ответ и проверка того, что действительно будет 39 очков, но без доказательства единственности этого варианта – 5 баллов.

**4.** Золушка, придя на бал, отметила, что её сверхточные сказочные электронные часы, которые никогда не ломаются, показывали время 20:35. Какое время будут показывать эти часы ровно через 1000000 минут (когда ее карета превратится в тыкву)?

**Решение.** 1000000 минут = 694 суток+10 часов+40 минут (равенство можно получить делением в столбик на 60 мин, а затем на 24 часа). Целое число суток не влияет на показания часов, поэтому нужно проследить, что будет через 10 часов и 40 минут. Если на часах 20:35, то через 40 минут будет 21:15, и еще через 10 часов – 07:15.

**Ответ:** 07:15.

**Критерии:**

–правильный ответ без пояснений (в том числе без вычислений в черновике) – 4 балла;

–правильно найдены минуты – 3 балла;

–правильно найдены часы – 4 балла.

**5.** Старший брат может вскопать грядку за 40 минут, а его младшему брату для этого требуется 2 часа. За какое время они вскопают три такие грядки, работая вдвоем?

**Решение.** Производительность работы старшего брата: 1,5 грядки в час, младшего: 0,5 грядки в час. Значит, общая производительность: 2 грядки в час. Следовательно, 3 грядки они вскопают за 1,5 часа = 90 минут.

**Ответ:** 90 минут.

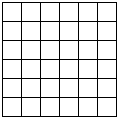
**Критерии:**

––правильный ответ без пояснений– 4 балла;

– в целом правильное решение с одной негрубой арифметической ошибкой – 5 баллов;

– в целом правильное решение с одной грубой арифметической ошибкой (ответ больше 2-х часов или меньше 1-го часа) – 4 балла.

**6.** Сколько всего квадратов изображено на картинке?



**Решение.** Подсчитаем количество квадратов каждого из видов: 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6. Квадратов 1×1 всего изображено на рисунке 36 (очевидно). Квадратов 2×2 всего изображено на рисунке 25 (левый нижний квадратик 1×1, входящий в квадрат 2×2 может занять ровно 25 положений). Аналогично, квадратов 3×3 – 16, 4×4 – 9, 5×5 – 4, 6×6 – 1. Всего получается 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91.

**Ответ:** 91.

**Критерии:**

– правильный ответ без пояснений– 3 балла;

– за каждое правильно найденное количество квадратов каждого из видов: 1×1, 2×2, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6 добавлять 1 балл.

**6 класс**

**1.** Снегурочка, готовясь к празднику, из всех имеющихся у нее шоколадных конфет кубической формы одинакового размера выложила на столе квадрат (вид сверху) в один слой. Снеговик, когда Снегурочка вышла, взял и съел все 20 конфет, которые лежали по краям сторон этого квадрата (то есть, по всему его периметру). Сколько шоколадных конфет осталось после этого на столе?

**Решение.** Только в квадрате 6×6 по периметру располагается 20 конфет. Убрав эти 20 конфет, мы получим квадрат 4×4, в котором 16 конфет.

**Ответ:** 16.

**2.** Оля, Олег, Полина и Паша участвовали в соревновании по шахматам и заняли первые четыре места (каждый свое, не деля его ни с кем другим). После соревнования Полина сразу же ушла, а остальные сделали по два заявления каждый. Каждый сказал, что первое место занял именно он. Кроме этого, Оля сказала, что все нечетные места заняли мальчики; Олег, что они с Олей заняли два соседних места; Паша, что все нечетные места заняли люди, чьи имена начинаются на букву О. Кто какое место занял на самом деле, если известно, что только один из оставшихся всегда говорил правду, а два других всегда лгали?

**Решение:** Оля и Паша соврали, т.к. каждый из них сделал два противоречивших самих себе заявления (поставил на первое место одновременно и себя, и кого-то еще). Значит, правду сказал Олег, он занял первое место, а Оля – второе. Теперь мы можем сделать вывод, что на третьем месте не может оказаться Паша, т.к. тогда второе заявление Оли окажется верным. Значит на третьем месте Полина, а Паша на четвертом. Проверкой убеждаемся, что полученное распределение мест удовлетворяет условию, при котором Олег говорит правду, а Оля и Паша лгали.

**Ответ:** Олег – 1-е место, Оля – 2-е, Полина – 3-е, Паша – 4-е.

**Критерий:** Правильный ответ без обоснований 1 балл; ответ с проверкой – 3 балла.

При правильных рассуждениях определены только *k* мест. Ставится оценка 3+*k*.

Решение на основе не доказанного предположения «пусть Олег говорил правду»: 3 балла. Проверка, что Оля либо Паша не могли говорить правду: по два балла за каждую проверку.

Если установлено, что Олег говорит правду, но в дальнейших рассуждениях не используется, что Оля лжет, то считается, что места Полины и Паши угаданы. При отсутствии других недочетов за это снимался 1 балл.

**3.** Можно ли квадрат 5×5 заполнить (в каждой клетке по одному числу) положительными и отрицательными числами так, чтобы в каждой строке произведение чисел было отрицательно, а в каждом столбце – положительно? Приведите пример, если можно, либо докажите, что нельзя.

**Решение.** В каждой строке должно быть нечетное число отрицательных чисел, следовательно, поскольку строк — нечетное число, то всего должно быть нечетное число отрицательных чисел. С другой стороны, в каждом столбце должно быть четное число отрицательных чисел, следовательно, всего в таблице должно быть четное число отрицательных чисел. Т.к. количество отрицательных чисел во всей таблице не может быть одновременно и четным и нечетным, заключаем, что заполнить числами, удовлетворив условиям задачи, — нельзя.

**Ответ:** нет, нельзя.

**4.** Дед Мороз решил выписать на снегу все натуральные числа последовательно одно за другим следующим образом:

**12345678910111213141516…..**

Какую же цифру запишет Дед Мороз на 2016-м месте в этом ряду цифр?

**Решение.** Отметим, что однозначных натуральных чисел всего 9, а двузначных всего 90. Поэтому, первые 9+2×90=189 цифр были использованы на запись всех однозначных и двузначных чисел. Трехзначных чисел всего 900, для записи которых потребовалось бы 2700 цифр. Делаем вывод, что 2016-я цифра приходится на трёхзначное число. Поскольку 2016=189+3×609, то 2016-я цифра – это третья цифра 609-го трехзначного числа т.е. третья цифра числа 708.

**Ответ:** 8.

**Замечание.** Последнюю фразу решения можно оформить по-другому: Всего написано 9+90+609=708 чисел. Поэтому 2016-я цифра, — это последняя цифра числа 708.

**Критерии.** А) Если при, в целом правильных рассуждениях, заявлено, что это последняя цифра числа, отличающегося от 708 в *k* разрядах (не более чем на 1 в каждом разряде), ставится оценка 7−*k*.

Б) Если при, в целом правильных рассуждениях, указано на цифру номер *n*≠2016, ставилась оценка .

В) Определено, что однозначные и двузначные числа занимают 189 цифр: 1 балл.

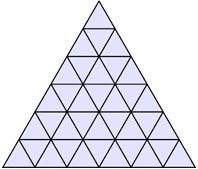
Итоговая оценка за задачу: ставится максимум из указанных трех критериев.

**5.** На доске были написаны десять последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2015. Какое число стёрли? Найдите все варианты ответа и докажите, что других быть не может.

**Решение 1.** Пусть исходные числа это *x*, *x*+1, *x*+2,…, *x*+9. Если стерли число *x*+*k*, где , то имеем равенство

Эквивалентно, получаем, . Таким образом, число 2015+*k* должно делиться на 9, это возможно только при *k*=1. После этого, находим, что *x*=219, а стертое число=220.

**Решение 2.** Если самое маленькое из исходных десяти чисел будет 220 или больше, то сумма любых девяти из них будет 220+221+…+228=2016 или больше. Если самое маленькое из десяти исходных чисел будет 218 или меньше, то сумма любых девяти из них будет 219+220+…+227=2007 или меньше. Следовательно, единственно возможный вариант исходных десяти чисел это 219, 220, 221, … , 228. Сумма этих десяти чисел равна 2235, поэтому вычеркнуть нужно 2235−2015=220.

**Ответ:** 220.

**Критерии.** Угадан ответ: 1 балл. Ответ с проверкой: 3 балла.

Если дополнительно проверено, что исходные 10 чисел не могли начинаться с 218 либо с 220 – добавляем по 2 балла за каждый случай.

**6.** Сколько всего треугольников изображено на картинке?

**Решение.** Отдельно будем считать треугольники вида ∆ и вида ∇. Треугольников со стороной 1: 21+15=36. Треугольников со стороной 2: 15+6=21. Треугольников со стороной 3: 10+1=11. Треугольников со стороной 4: 6+0=6. Треугольников со стороной 5: 3+0=3. Треугольников со стороной 6: 1+0=1.

Итого: 36+21+11+6+3+1=78.

**Ответ:** 78.

**Критерии.** Если «всё учтено», кроме одного «перевернутого» треугольника со стороной 3, с ответом 77: 6 баллов.

При неправильном решении за каждое правильное указание количества треугольников с данной стороной добавляем по баллу.

**7 класс**

**1.** В какой-то момент на планете Зетта было всего 30 злых и 35 добрых по характеру мюмзиков. Известно, что при встрече двух мюмзиков каждый меняет свой тип характера (с доброго на злой, со злого на добрый). Могут ли после нескольких таких встреч все мюмзики на этой планете стать одного типа характера?

**Решение.** Если добрые ни с кем не будут встречается, а злые (которых четное число) встретятся по парам, то (после 15-ти таких встреч) все станут добрыми.

**Ответ:** Могут.

**Критерии.** Если решалась задача с 35 злыми и 30 добрыми – баллы не снимаются.

**2.** Шахерезада выписала на песке тысячу и одно целое число, каждое из которых по абсолютной величине не превосходит **1001**.Известно, что и сумма, и произведение всех этих чисел равны нулю. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел?

**Решение.** Среди чисел обязательно должен быть нуль, остальные для достижения максимума суммы квадратов должны образовывать противоположные пары: 1001 и −1001 (с наибольшим значением модуля). При этом сумма чисел будет равна нулю. Поэтому ответ **1000×10012=1002001000.**

**Ответ:** 1000×1001×1001 = 1002001000.

**Критерии:** Если замечено, что хотя бы одно число равно нулю: 1 балл. При этом, если заявлено, что равных нулю должно быть более одного числа (например, все), то этот балл не ставится.

Задача решена в предположении, что числа разные: 5 баллов.

**3.** Известно, что в одном зоопарке все «тартуплексы» умеют летать или плавать (возможно, и то, и другое). Выяснилось, что 20% «тартуплексов», умеющих летать, умеют еще и плавать, а 25% «тартуплексов» умеющих плавать, умеют еще и летать. Сколько всего «тартуплексов» в этом зоопарке, если известно, что их больше 25, но меньше 35?

**Решение.** Пусть *x* – количество тартуплексов которые умеют и летать и плавать. Тогда летающих будет 5*x*, а плавающих будет 4*х*. всего тартуплексов будет . Следовательно, количество тартуплесов кратно восьми. В промежутке от 25 до 35 только одно число делится на 8, — это 32. (При этом ).

**Ответ:** 32.

**Критерии:** Замечено, что ¼ часть одной группы равно 1/5 части другой группы: 2 балла.

Если «общая часть» учтена дважды, получено соотношение вида с итоговым ответом 27 (и без других ошибок): 5 баллов.

Решение на основе предположения, что летать и плавать могут 4 тартуплекса (без попытки рассмотреть другие случаи) оценивалось в 5 баллов.

**4.** На необитаемом острове растут ровно 18 пальм. Кокосы растут только на них, с одинаковым числом на каждой. После того, как подул ветер, с некоторых пальм кокосы осыпались. С каких-то упала ровно половина кокосов, с каких-то – одна треть, с остальных ничего не упало. При этом известно, что со всех пальм вместе взятых упала ровно одна девятая часть всех кокосов. Определите по приведенным данным число пальм, с которых кокосы не падали после порыва ветра.

**Решение 1.** Пусть на пальме *x* кокосов. Тогда осыпалось кокосов. Пусть половина кокосов осыпалось с *k* пальм, а треть кокосов с *n* пальм. Тогда получаем или . Следовательно, *k* — четно, а . Поскольку и , то единственным решением уравнения будет *k*=2, *n*=3. Следовательно, кокосы упали с пяти пальм, а с 18−5=13 пальм — не упали.

**Решение 2.** Пусть на пальме *x* кокосов. Тогда осыпалось кокосов.

Если предположить, что осыпались только те пальмы, что «наполовину», то всего осыпалось пальмы.

Если предположить, что кокосы опадали только с тех, что «на одну треть», то всего осыпалось пальм. Поскольку кокосы опадали и с тех и с других, то число опавших пальм больше четырех и меньше шести, т.е. равно 5.

**Ответ:** 13.

**Критерии.** Ответ с примером: 3 балла.

Ответ с примером и с уравнением 3*x*+2*y*=12: 5 баллов.

Если задача решается в предположении, что «каких-то» может быть и нулем, и обосновано получен ответ 12,13,14: ставим 6 баллов.

**5.** Петя и Вася играют в следующую игру. В начале по кругу стоят шесть чисел 2015, 2016, 2015, 2016, 2015, 2016. Каждым своим ходом Петя вычитает из любых двух соседних чисел по 1, а Вася меняет любые два числа местами. Первым ходит Петя, затем Вася и так далее по очереди. Петя выигрывает, если пять чисел станут равными, и проигрывает, если появятся отрицательные числа. Кто выигрывает при правильной игре?

**Решение.** Заметим, что четность стоящих чисел чередуется. Петя меняет четность у двух соседних чисел. Если Вася переставит ту пару чисел, которую уменьшил Петя, то снова четность стоящих чисел будет чередоваться. Если Вася будет действовать по этому принципу, то всегда будет ровно три четных и три нечетных числа, т.е. 5 равных чисел получится не может. Поскольку числа в процессе игры уменьшаются, то в какой-то момент появится отрицательное число и Вася выиграет

**Ответ:** Вася. (переставляем ту пару чисел, которую уменьшил Петя)

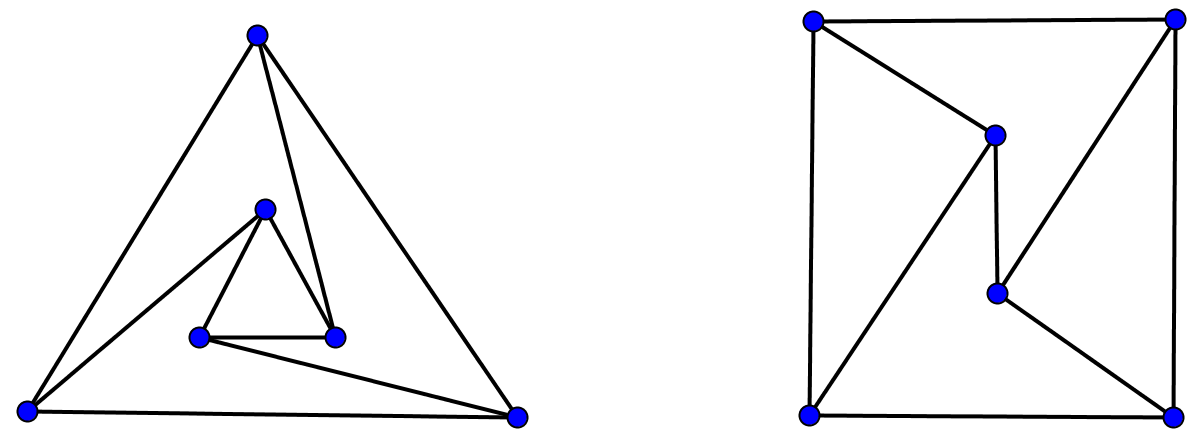
**Замечание.** У Васи есть и другие выигрышные стратегии. Например, следующая.

Петя может получить 5 одинаковых чисел, если уже есть 3 или 4 одинаковых, причем, своим выигрышным ходом, Петя должен не менять уже полученные одинаковые числа (иначе их количество не увеличится). Если Петя получил 4 одинаковые числа, то Вася должен поставить два других не рядом. Если Петя получил 3 одинаковые числа, то Вася может одним ходом сделать так, что бы они стояли через одного. Этой стратегией Вася не даст возможность Пете сделать выигрышный ход.

**Критерии:** Решения, в которых один игрок помогает другому выиграть: 0 баллов. Указан алгоритм перестановки только что уменьшенных чисел, но не обосновано, что он работает: 6 баллов.

**6.** Шесть круглых озер соединены девятью прямолинейными каналами, которые вне озер не пересекаются. Известно, что из каждого озера выходит ровно три канала, два из которых образуют угол меньше развернутого, а третий – проходит внутри этого угла. Два озера не могут быть напрямую соединены более чем одним каналом. Начертите возможный план расположения озер и каналов, изобразив озера точками, а каналы отрезками.

**Решение.** Существует несколько способов нарисовать план:



**Критерии.** Наличие правильного рисунка: 7 баллов. Если изображен развернутый угол – снимался балл за каждый такой угол.

Если при неправильной картинке в пяти точках выполнено условие, а при изменении положения одной точки меньше чем на половину длины самого короткого ребра, получается правильная конфигурация, ставилось 2 балла.

**8 класс**

**1.** Известно, что  Найдите значение выражения    

**Решение.** Справедливо равенство . Следовательно, , а тогда . Значит, .

**Ответ:** .

**Критерии:**

––правильный ответ без пояснений– 3 балла;

– получено одно из равенств , или – ставить 5 баллов.

**2.** Шерлок Холмс записал три ненулевые цифры и, переставляя их, составил всевозможные трехзначные числовые коды. В итоге оказалось, что сумма всех записанных Холмсом числовых кодов составила 2775. Какие цифры изначально выбрал Шерлок? Найдите все варианты ответа и докажите, что других быть не может.

**Решение.** Все три цифры одинаковыми быть не могут, иначе получится лишь один трехзначный код, который, очевидно, не равен 2775.

Пусть все три цифры различны. Обозначим их: *a*,*b*,*c*. Тогда имеется ровно 6 разных трехзначных кодов составленных из этих цифр: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Но сумма этих кодов всегда четная, так как: *abc* + *bac*, *acb* + *cab* и *bca* + *cba* – четные числа. Число 2775 нечетное, значит все три цифры не могут быть различны.

Остается рассмотреть случай: когда две цифры одинаковы, а третья отлична от них. Обозначим цифры загаданные Шерлоком Холмсом так: *a*,*a*,*b*. Из них получаются коды: *aab*, *aba*, *baa*, c суммой равной (2×*a*+*b*)×111 = 2775. Последнее равенство эквивалентно следующему, 2×*a*+*b* = 25. Это равенство выполняется только если цифра *a* больше 7. Значит, имеется два варианта цифр 1) *a* = 8, *b* = 9 и 2) *a* = 9, *b* =7.

**Ответ:** Шерлок Холмс мог взять цифры 9,9,7 либо цифры 8,8,9, других вариантов нет.

**Критерии:**

– доказано, что все цифры не могут быть различными – добавить 3 балла;

– доказано, что все цифры не могут быть одинаковыми – добавить 1 балла;

– полностью разобран случай, когда имеется ровно две одинаковых цифры – добавить 3 балла;

– правильный ответ без пояснений – 2 балла;

–один из двух вариантов ответа без пояснений – 1 балл.

**3.** Несколько портных короля могут сшить заказанные им 300 платьев за целое число дней. Известно, что каждый из них за один день шьет ровно по 15 платьев. Король подсчитал, что если дополнительно привлечь к пошиву еще нескольких таких же портных, то все портные справятся с заказом ровно на 6 дней быстрее. Сколько портных по подсчетам короля потребуется дополнительно?

**Решение.** Построим таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число портных | 1 | 2 | 4 | 5 | 10 | 20 |
| Время пошива | 20 | 10 | 5 | 4 | 2 | 1 |

Если число портных будет отличаться от указанного в таблице, то они точно не справятся за целое число дней. Из таблицы видно, что разница в 6 дней есть только между временем пошива для 2 и 5 портных. Значит, изначально у короля было 2 портных, а по его подсчетам дополнительно требуется 3 портных.

**Ответ: 3.**

**Критерии:**

– доказательство единственности ответа стоит 3 балла;

– правильный ответ с проверкой существования– 4 балла;

– правильный ответ без пояснений – 3 балла.

**4.** В выпуклом четырехугольнике ABCD измерили длины сторон AB и CD. Оказалось, что одна из них ровно в два раза больше, чем другая. Сумма углов четырехугольника при меньшей из этих двух сторон равна 180°. Найдите углы четырехугольника ABCD, если известно, что сумма углов при одной из его сторон равна 120°.

**Решение.** Рассмотрим случай CD=2AB (другой случай рассматривается аналогично). Пусть AB=*a* и CD=2*a*. Сумма углов при стороне AB равна 180° – это означает, что . Следовательно, при стороне CD сумма углов тоже 180°. Поэтому сумма углов 120° может быть либо при стороне BC, либо при стороне AD. Без ограничения общности, считаем, что сумма углов при стороне AD равна 120° (другой случай рассматривается аналогично). Проведем отрезок CE равный и параллельный отрезку AB. Тогда угол ECD=60°. Обозначим середину стороны CD точкой F. Тогда CE=CF=*a*. Это означает, что треугольник ECF является равносторонним. Тогда в треугольнике EFD стороны EF и FD равны, а угол между ними равен 120°, следовательно, угол FDE равен 30°. Отсюда находим углы четырехугольника: , , , .

**Ответ:** 90°, 90°, 150°,30°.

**Замечание.** Возможны следующие 4 варианта

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | С | D |
| 1 | 90° | 90° | 150° | 30° |
| 2 | 90° | 90° | 30° | 150° |
| 3 | 30° | 150° | 90° | 90° |
| 4 | 150° | 30° | 90° | 90° |

и только они. (Остальные 3 варианта получаются, если другим образом делать предположения о соотношениях сторон AB и СD, AD и BC.)

**Критерии:**

– доказано, что четырехугольник является трапецией: 1 балл;

– Решение на основе не доказанного предположения, что есть прямой угол с доказательством, что четырехугольник является трапецией – 3 балла.

– Решение на основе не доказанного предположения, что есть прямой угол и недоказанного предположения, что четырехугольник является трапецией – 2 балла.

**5.** Ученики школы *№0* получили на контрольной работе по математике тройки, четверки и пятёрки (других оценок не было). Девочек в школе в два раза меньше, чем мальчиков. Средняя (арифметическая) оценка за контрольную среди девочек на один балл выше, чем средняя оценка всех учеников школы. Известно, что и среди девочек, и среди мальчиков встречается все три типа оценок. Найдите наименьшее возможное число девочек в школе *№0.*

**Решение.** Поскольку мальчиков в два раза больше, то их средняя оценка будет на 0,5 меньше чем средняя по школе. Следовательно, средняя оценка девочек больше ровно на 1,5 балла средней оценки мальчиков. Пусть всего девочек в школе (), тогда их средняя оценка не больше , а средняя оценка мальчиков не меньше . Должно выполняться неравенство . Это неравенство эквивалентно неравенству .

Пример с 9 –ю девочками: 7 девочек получили «5», 1 девочка –«4», 1 девочка –«3», 1 мальчик – «5», 1 мальчик – «4», 16 мальчиков –«3». Средний балл девочек равен , общий средний балл равен .

**Ответ:** 9.

**Критерии:**

– правильный ответ – добавить 2 балла;

– приведен пример 9 девочек – добавить 2 балла;

– доказана оптимальность ответа – добавить 3 балла.

**6.** В одной стране 20 городов. Некоторые из них соединены попарно автомобильными двусторонними дорогами. Причем, дороги не пересекаются вне городов, и каждый город соединен не менее чем с 10-ю другими. Турист хочет, передвигаясь по дорогам, посетить все города страны, побывав ровно по одному разу в каждом. Сможет ли турист это сделать, если начальный и конечный город своего пути он может выбирать произвольно?

**Решение.** Рассмотрим граф, в котором городам задачи соответствуют вершины, а дорогам ребра. Требуется доказать, что в этом графе существует путь, в котором каждая вершина присутствует ровно один раз.

Выберем самый длинный путь L, в котором вершины не повторяются. Если самых длинных несколько, то выберем любой из них. Если выбранный путь содержит 20 вершин, то всё доказано. Предположим, что он содержит *n* < 20 вершин. Тогда вне пути L лежат 20 – *n* вершин. Введем направление на выбранном пути L от начальной вершины до конечной, и рассмотрим конечную вершину *K* этого пути. Если хотя бы одно ребро ведёт из *K* в вершину, не принадлежащую L, то путь L можно удлинить, что противоречит его выбору.

Таким образом, все ребра из *K* ведут в вершины пути L. Отметим концы ребер, выходящих из *K*. По условию отмеченных вершин не меньше 10 (значит, *n* > 10). Для каждой отмеченной вершины *A* покрасим в зеленый цвет вершину *A*', следующую за ней на пути L по направлению конечной вершине *K*. Получилось не менее 10 зеленых вершин (отметим, что вершина *K* тоже зеленая).

Рассмотрим произвольную вершину *B* вне пути L. Если хотя бы одно ребро ведёт из *B* в зеленую точку *A*', то пройдём по пути L от его начала до точки *A*, затем по ребру *AK*, затем вернёмся по пути L в точку *A*' и, наконец, пройдём по ребру *A*'*B*. В результате получится путь, содержащий все вершины L и вершину *B*. Т.е. мы нашли более длинный путь, что противоречит выбору пути L.

Значит, вершина *B* не может соединяться с зелеными вершинам. Но кроме зеленых вершин и самой вершины *B* остается не более девяти вершин графа. А это означает, что из вершины *B* не может выходить более девяти дорог, что противоречит условию задачи. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение о том, что *n* < 20 неверно.

**Ответ:** Сможет.

**Критерии:**

– правильный ответ без обоснований – 0 баллов;

– доказана связность страны – добавить 2 балла;

– доказано, что существует путь, содержащий не менее 11 городов, каждый из которых встречается ровно один раз – 2 балла.