**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.**

**7-11 класс.**

**Муниципальный этап региональной олимпиады школьников по математике.**

**5-6 класс.**

**Краснодарский край. 19 ноября 2015г.**

**Решения олимпиадных заданий**

**Общие принципы оценивания олимпиадных заданий**

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Помимо этого обращаем внимание на следующее.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели с указанием балла набранного каждым Участником **по каждой задаче**.

**5 класс. Решения заданий по математике.**

**1.** Имеется 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая линия. Сколько проведено прямых линий?

**Решение.** Обозначим указанные точки A, B, C, D, E. Тогда проведены следующие прямые: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, — всего 10 прямых.

**Ответ:** 10.

**Замечание.** Необоснованный правильный ответ: 5 баллов.

Если правильный ответ подтвержден нарисованным пятиугольником, в котором проведены 5 диагоналей — 7 баллов. Возможны и другие обоснования.

**2.** В турнире по шахматам участвовали три пятиклассницы и две шестиклассницы. В каждой партии играли: пятиклассница и шестиклассница. Известно, что Анна выиграла у Марии, Софья выиграла у Ирины, а Анна у Ольги, и, наконец, Ольга выиграла у Софьи. Ничьих не было. Выясните, как зовут шестиклассниц. Обоснуйте свой ответ.

**Решение:** Так как Анна играла и с Марией и Ольгой, то из этого следует, что Мария и Ольга учатся в одной параллели, а Анна в другой. Так как Ольга играла с Софьей, то отсюда следует, что Софья в той же параллели, что и Анна. Так как Софья играла с Ириной, то отсюда следует, что Ирина не из параллели Софьи и Анны, то есть она из одной параллели с Марией и Ольгой. Так как пятиклассниц было трое, а шестиклассниц было две, то Анна и Софья шестиклассницы.

**Ответ:** Анна и Софья.

**Замечание.** Необоснованный правильный ответ: 3 балла.

**3.** Набор чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбейте на четыре группы (в группе может быть одно или несколько чисел) так, чтобы в каждой следующей группе сумма всех её чисел была в два раза больше, чем в предыдущей группе.

**Решение:** Пусть сумма чисел в первой группе *х*, тогда во второй группе сумма чисел равна 2*х*, в третьей – 4*х*, в четвёртой – 8*х*. Сумма чисел во всех группах равна 15*х*. Сумма чисел от 1 до 9 равна 45, отсюда *х*=3, числа можно разбить, например, следующим образом: (3); (6); (9, 1, 2); (4, 5, 7, 8). Возможны и другие варианты.

**Замечание.** Любой правильный пример — 7 баллов (не обязательно обосновывать как был получен пример).

**4.** Расставьте в клетки таблицы 6×6 крестики и нолики (по одному символу в каждую клетку) так, чтобы всего в таблице крестиков и ноликов оказалось поровну, но при этом в любом квадрате 2×2 крестиков и ноликов было бы не поровну.

**Решение:** например, так

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| × | × | × | × | × | × |
| × | × | × | × | × | × |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × |

**Замечание.** Любой правильный пример: 7 баллов (не обязательно обосновывать как был получен пример).

**5.** Старинные часы (со стрелками) за всю неделю по сравнению с точными часами «спешат» на 1час 52 минуты в неделю (при этом всю неделю скорость хода часов постоянна). В полночь с воскресенья на понедельник старинные часы поставили правильно. Какое время они будут показывать в 6 часов вечера в ближайший четверг? Обоснуйте свой ответ.

**Решение:** С момента, когда часы выставили правильно, и до шести часов вечера в четверг прошло 3 дня и 18 часов. 1час 52 минуты равняется 112 минутам. Значит, каждые сутки часы уходят вперёд на 112/7=16 минут. В одних сутках 24 часа, значит за 6 часов они уходят вперёд на 4 минуты. За 3 дня и 18 часов часы уйдут вперёд на 4×15=60 минут, то есть на 1 час. Значит, в четверг в 18:00 часы покажут 19:00, то есть 7 часов вечера.

**Ответ:** Семь вечера.

**6.** Саша после прогулки в лесу с друзьями стал считать собранные грибы. Оказалось, что «не подосиновиков» собрано вдвое больше, чем «не сыроежек». Сыроежек вдвое больше, чем подосиновиков и груздей вместе взятых. Единственный белый гриб нашёл Саша. Каких грибов было собрано больше — груздей или маслят? Обоснуйте свой ответ.

**Решение:** Обозначим количество собранных подосиновиков за П, сыроежек – за С, груздей – за Г, маслят – за М, других грибов (не считая белый) – за Д. Тогда из условия следуют два равенства: С+Г+М+Д+1=2×(П+Г+М+Д+1) и С=2×(П+Г). Преобразуя первое равенство с учетом второго, получаем 2П+3Г+М+Д+1=2П+2Г+2М+2Д+2. После сокращения: Г=М+Д+1 – груздей больше, чем маслят.

**Ответ:** груздей больше, чем маслят.

**Замечание.** Если не учтено, что могут быть другие грибы – снимаем 2 балла. Правильный ответ без обоснования: 0 баллов. Правильный ответ подтвержденный примером (или несколькими примерами): 2 балла.

**6 класс. Решения заданий по математике.**

**1.** Бараш выписал все целые числа от 100 до 10000 включительно. Сколько четных чисел пришлось выписать Барашу?

**Решение.** Четных чисел от 1 до 10000 всего 5000. Четных чисел от 1 до 99 всего 49. Значит, Бараш выписал 5000 – 49 = 4951 четных чисел.

**Ответ:** 4951.

**Замечание.** Правильный ответ оценивать в 7 баллов.

**2.** У Кости есть четыре палочки длиной по 1 см каждая, четыре палочки длиной по 2 см, семь палочек длиной по 3 см и пять палочек длиной по 4 см. Костя захотел из всех этих палочек выложить контур прямоугольника. Сможет ли он это сделать? Если да, то нарисуйте как, если нет – объясните, почему.

**Решение.** Нетрудно заметить, что периметр прямоугольника с целочисленными сторонами всегда чётен, а сумма длин всех данных палочек нечётна (53), значит, составить прямоугольник Косте не удастся.

**Ответ:** нет.

**3.** В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных – «НЯ». Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 20 детей, слово «НЯНЯ» – 30 детей, а слово «МАНЯ» – 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковые? Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** Поскольку карточек у каждого по три, то каждый ребенок может составить либо слово «МАМА» либо слово «НЯНЯ» но не оба. Следовательно, всего детей 20+30=50. Дети с одинаковыми карточками это ровно те, которые не могут составить слово «МАНЯ». Поэтому таких детей будет 50−40=10.

**Ответ:** 10.

**4.** В велопробеге Краснодар-Новороссийск приняли участие три велосипедиста. Сначала стартовал велосипедист **A**, затем — **Б**, и последний — **В**. После финиша выяснилось, что во время велопробега, **А** обгонял других 5 раз (в сумме), **Б** обгонял других 8 раз (в сумме), **В** обгонял других 15 раз (в сумме), причем все трое ни разу не оказывались в одной точке одновременно. В каком порядке финишировали велосипедисты, если известно, что они пришли к финишу в разное время? Обоснуйте свой ответ.

**Решение.** Поскольку при старте перед **В** находятся двое, то чтобы он смог совершить 15 обгонов, необходимо, чтобы его обогнали хотя бы 13 раз. Но общее число обгонов **А** и **Б** равно 5+8=13, то они обгоняли только **В** и не обгоняли друг друга. После 15 обгонов **В** окажется первым. Значит велосипедисты финишировали в порядке **В**, **А**, **Б**.

**Ответ:** **В**, **А**, **Б**.

**Замечание.** Угадан ответ: 1 балл.

Показано, что **В** должен прийти первым, но отсутствует (или неверное) рассуждение, показывающее, что **А** и **Б** не обгоняли друг друга: 4 балла.

**5.** Сто котов-рыбаков ловили рыбу. Никто из них не остался без улова, но никто не поймал больше 7 рыб. При этом, не более 6 рыб поймало ровно 98 рыбаков, не более 5 рыб поймало ровно 95 рыбаков, не более 4 рыб поймало ровно 87 рыбаков, не более 3 рыб поймало ровно 80 рыбаков, не более 2 рыб поймало ровно 65 рыбаков и не более одной – 30. Сколько всего рыб поймали рыбаки? Обоснуйте свой ответ.

**Решение.**Так как никто не остался без улова, а 30 рыбаков поймали не более 1 рыбы, следовательно, они поймали ровно по 1 рыбе. Не более 2 рыб поймали 65 рыбаков, из них 30 поймали по одной, следовательно, (65 − 30) = 35 рыбаков поймали по 2 рыбы. Аналогично, по 3 рыбы поймали (80 − 65) = 15 рыбаков, по 4 рыбы поймали (87 − 80) = 7 рыбаков, по 5 рыб поймали (95 − 87) = 8 рыбаков, по 6 рыб (98 − 95) = 3 рыбака и по 7 рыб (100 − 98) = 2 рыбака. Итого всего поймано 2∙7+3∙6+5∙8+7∙4+15∙3+2∙35+1∙30=245 рыб.

**Ответ:** 245.

**6.** По некоторым разведданным стало известно, что три профессора: Петров, Виноградов и Третьяков преподают различные предметы: химию, биологию и математику (каждый по одному своему предмету) в университетах: Москвы, Ярославля и Краснодара (каждый в своем городе, там где и проживает). Разведчики также доложили: 1) Петров никогда не был в Краснодаре, а Виноградов в Ярославле. 2) Краснодарец старше профессора математики. 3) Виноградов играет в шахматы лучше, чем биолог. 4) Профессор из Ярославля преподает химию. Какой предмет и в каком городе преподает Третьяков? Обоснуйте свой ответ.

**Решение**. Виноградов не химик (следует из первого и четвертого высказывания). Виноградов не биолог (из третьего высказывания). Из этого следует, что Виноградов является математиком, а значит, не является Краснодарцем (второе высказывание). Из чего следует, что Виноградов – математик, работает в Москве. Отсюда следует, что Краснодарцем является Третьяков (так как Петров никогда не был в Краснодаре, то есть он — из Ярославля). Так как профессор из Ярославля (Петров) преподает химию, то Третьяков в Краснодаре преподает биологию.

**Ответ:** биологию в Краснодаре.

**7 класс. Решения заданий по математике.**

**1.** На бумажной полоске написано число 123456. Полоску разрезают на три части; каждый разрез проходит между цифрами. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** (1)(2)(3456); (1)(23)(456); (1)(234)(56); (1)(2345)(6); (12)(3)(456); (12)(34)(56); (12)(345)(6); (123)(4)(56); (123)(45)(6); (1234)(5)(6);

**Ответ:** 10.

**2.** Очень неточные и не предсказуемые весы показывают вес, который может отличаться от настоящего, но не больше, чем на 500г (при различных взвешиваниях отклонения показаний весов от истинного веса могут быть разными!). Петя взвесил на них свой рюкзак. Весы показали 5 кг. А когда Миша взвесил этот же рюкзак уже вместе с килограммовой гирей — весы показали 7 кг. Сколько весит рюкзак на самом деле? Ответ объясните.

**Решение.** Исходя из условий задачи и результатов первого взвешивания, вес рюкзака мог быть не более 5,5 кг. После второго взвешивания рюкзака с гирей, — не менее 6,5 кг., то есть вес одного рюкзака не менее 5,5. Из чего следует, что вес рюкзака может быть равен только 5,5 кг.

**Ответ:** 5,5 кг.

**3.** По дороге идут Коля и Саша. Саша делает шаги на 20% короче и в то же время на 20% чаще, чем Коля. Кто из мальчиков идет быстрее?

**Решение.** Пусть Коля имеет длину шага, равную *x*, тогда длина шага Саши составляет 0,8*x*. Когда Коля делает 10 шагов, Саша делает 12 шагов. Получаем, что за одно и то же время Коля проходит расстояние 10*x*, а Саша 9,6*x*, т.е. Саша идет медленнее.

**Ответ:** Коля.

**4.** Натуральные числа *a* и *b* таковы, что 56*a* = 65*b*. Докажите, что (*a* + *b*) число составное.

**Решение.** Заметим, что *;* 2∙2∙2∙7∙*a*=5∙13∙*b*, из этого следует, что *а* делится на 65. То есть *a*=65*k* для некоторого натурального *k*. Рассмотрим

Так как число 121 число составное, то тоже.

**5.** На плоскости нарисовано шесть отрезков, причем никакие два из них не лежат на одной прямой. Максим отметил все точки пересечения этих отрезков красным цветом (и только их). Оказалось, что каждая такая точка принадлежит ровно двум отрезкам. На первом отрезке Максим отметил 3 красные точки, на втором – 4, на трех других – по 5 на каждом. Сколько красных точек Максим отметил на шестом отрезке?

**Решение.** Заметим, что на каждом отрезке есть не более 5 точек, которые можно отметить. На третьем, четвертом и пятом отрезке отмечены все 5, значит, эти отрезки пересекаются с шестым. Первый отрезок, очевидно, тоже пересекается с ними, но на нем отмечено красным всего 3 точки, значит, больше он не пересекается ни с кем. На втором отрезке 4 красные точки – он пересекается с третьим, четвертым и пятым, но не с первым. Следовательно, он пересекается с шестым. Итого, на шестом отмечено 4 точки.

**Ответ.** 4.

**6.** Хозяйка испекла для гостей пирог в форме круга (вид сверху). К ней может прийти либо 10, либо 11 человек. На какое наименьшее число кусков (необязательно одинаковых) ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 10, так и между 11 гостями?

**Решение.** Если придут 10 гостей, то каждый должен получить не меньше двух кусков. В самом деле, иначе один из 10 гостей получил бы один кусок в 1/10 часть пирога, и если бы пришло 11 гостей, то этот кусок нужно было бы дополнительно разделить. Таким образом, количество кусков не меньше, чем  2·10 = 20.

Покажем, что двадцати кусков хватит. Разрежем пирог на 10 кусков по 1/11 части пирога и на 10 кусков по 1/110 пирога. Если придут 10 гостей, то каждому дадим один большой кусок и один маленький – всего 1/11 + 1/110 = 1/10. Если же придут 11 гостей, то десяти из них дадим по одному большому куску в 1/11, а одному – 10 маленьких кусков.

**Ответ:** 20.

**8 класс. Решения заданий по математике.**

**1.** В равнобедренном треугольнике один из углов равен 30°. Найдите остальные его углы.

**Решение.** Этот угол может быть либо при основании, либо нет. В первом случае получаем, что другие углы равны: 30° и 120°; во втором: 75° и 75°.

**Ответ:** 30° и 120°; 75° и 75°.

**Замечание.** Если найден только один случай: 3 балла.

**2.** По некоторым разведданным стало известно, что из пункта A в пункт B проехал автомобиль. Также разведчики доложили, что за каждый промежуток времени длиною в один час автомобиль проезжал ровно 60 км. Вся поездка из пункта А в пункт B заняла 3,5 ч. Следует ли из всего этого, что средняя скорость автомобиля за всё время его пути была равна 60 км/ч?

**Решение.** Время пути автомобиля состоит из 7 получасов. Предположим, что каждый нечетный получас он движется со скоростью 120 км/ч, а каждый четный со скоростью 0 км/ч. Тогда за каждый час он движется ровно 30 минут и проходит 60 км. Всего он пройдет 240 км, а средняя скорость будет .

**Ответ:** нет.

**Замечание.** Если просто сказано, что движение могло быть не равномерным (без примера) и сделан вывод, что средняя скорость отлична от 60 км/ч, - ноль баллов.

**3.** На чудо-яблоне выросло 2015 ананасов и 2016 бананов (других плодов нет). Каждый час садовник срывает ровно два плода, и после этого на дереве тут же вырастает один плод. При этом, если он срывает два одинаковых плода, то вырастает ананас, а если два разных – банан. Может ли последний плод, который останется на этом дереве, оказаться бананом?

**Решение.**  Заметим, что четность числа бананов на дереве в любом случае не изменяется. Поэтому число бананов не может стать равным одному.

**Ответ:** нет.

**4.** Известный политик каждый день лжет. При этом, в каждый будний день (с понедельника по пятницу) он лжет ровно девять раз, в каждую субботу — ровно три раза, а в каждое воскресение лжет ровно 2 раза. В полночь новогодней ночи его заместитель с интересом осознал, что за год этот политик солгал ровно 2603 раза. Рассвет какого дня недели сменит эту новогоднюю ночь?

**Решение.** За одну неделю политик лжет раз. Год (365 или 366 дней) - это 52 недели и 1-2 дня. Следовательно, в последние 1-2 дня политик солгал раза. Это возможно только в случае одной субботы. Поэтому ответ: Воскресение.

**Ответ:** воскресение.

**Замечание**. Если из решения не вычитывается понимание того, что года бывают разными (по числу дней) – снимать 2 балла.

Найдено, что последний день – суббота, но не сделан вывод, что рассвет в воскресение – снимать 1 балл.

**5.** В трапеции ABCD c меньшим основанием BC диагональ АС перпендикулярна к боковой стороне CD. . Найдите AB, если периметр трапеции равен 2015, а .

**Решение.** Пусть BC=*a*, тогда AB=*a*, как стороны равнобедренного треугольника ABC с углами при основании в 30°. ( как накрест лежащие, по условию; .) CD=AB=*a* т.к. трапеция равнобедренная. Из прямоугольного треугольника ACD следует, что AD=2*a*, как гипотенуза треугольника с углом в 30 градусов. Следовательно, периметр трапеции равен 5*a*. Из условия следует , что

**Ответ:** 403.

**6.** В парламенте 2015 депутатов, некоторые из которых — лжецы, а остальные — рыцари. Если лжец обманул рыцаря, то между ними на вечно устанавливается вражда. (депутаты одного типа никогда не враждуют). В один момент оказалось, что любые два рыцаря имеют различное число врагов в парламенте. Какое наибольшее количество рыцарей могло быть в таком парламенте?

**Решение.** Если в парламенте 1008 рыцарей и 1007 лжецов, то количество врагов одного рыцаря может быть любым целым числом от 0 до 1007 (1008 различных вариантов), и это соответствует условиям задачи. Если рыцарей 1009 или больше, то лжецов будет 1006 или меньше, а различных вариантов количества врагов будет не более 1007. Поэтому, в этом случае хотя бы два рыцаря будут иметь одинаковое количество врагов.

**Ответ:** 1008.

**9 класс. Решения заданий по математике.**

**1.** Чертежнику поступило задание начертить четырёхугольник, в котором две стороны параллельны, а три — равны по 5 см. Можно ли утверждать, что периметр этого четырёхугольника обязательно будет равен 20 см?

**Решение.** Это может быть равнобокая трапеция.

**Ответ:** Нет.

**2.** В числе 123456789 можно взять любые две цифры и заменить каждую из них на целую часть их среднего арифметического. Эту операцию можно повторить с новым числом. Можно ли такими операциями получить число, большее 800000000?

**Решение.** Да, можно. **1**2**3**456789 → **2**22**4**56789 → **3**223**5**6789 → **4**2234**6**789 → **5**22345**7**89 → **6**223456**8**9 → **7**2234567**9** → 822345678.

**Ответ:** Да.

**3.** Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых, уравнение

имеет единственное решение.

**Решение.** Данное уравнение равносильно системе

При первое уравнение решений не имеет, а значит и система тоже. Пусть . Если первое уравнение будет иметь единственное решение не равное трем, то система будет иметь единственное решение.

Найдем значения *а,* при которых

Так как , то только при первое уравнение будет иметь единственное решение и оно .

Если первое уравнение будет иметь два различных решения, одно из которых равно трём, то система будет иметь единственное решение. Подставим в первое уравнение , чтобы найти соответствующее значение параметра . Отсюда . При найденном значении *a* дискриминант , следовательно, имеется еще один корень.

**Ответ**. , .

**Замечания.** В случаях ответа и : 2 балла.

Если в ответ включено значение: : снимаем 3 балла.

**4**. У Нептуна служат осьминоги. У каждого осьминога либо шесть, либо семь, либо восемь ног. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 либо 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». Сколько ног у каждого из этих осьминогов?

**Решение.** Так как осьминоги противоречат друг другу, то возможны два случая: либо все осьминоги лгут, либо ровно один из них говорит правду.

Если все осьминоги лгут, то у каждого из них по 7 ног. Значит, вместе у них 28 ног. Но тогда синий осьминог сказал правду — противоречие.

Если же три осьминога солгали, а четвёртый сказал правду, то у солгавших осьминогов должно быть по 7 ног, а у сказавшего правду - либо 6, либо 8. Поэтому вместе у них либо 27, либо 29 ног, то есть правду сказал зелёный осьминог. Таким образом, у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

**Ответ:** у зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

**5.** Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.

**Решение.** Пусть в трапецию ABCD, в которой , вписана окружность с центром O и радиуса *r*, касающаяся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. . Пусть LC=b, следовательно, CM=b по свойству касательных к одной окружности проведенных из одной точки. По этому же свойству MD=DN, пусть DN=c. Так как центр вписанной окружности - очка пересечения биссектрис, то треугольник COD – прямоугольный (так как BC||AD). ОМ=*r*; . Из подобия треугольников COM и ODM следует, что . Получаем, что ; ; . Тогда площадь трапеции

в итоге запишется так:

**6.** Обозначим через сумму цифр натурального числа *x*. Решите уравнение в натуральных числах:

**Решение.** Слагаемые в левой части имеют одинаковые остатки при делении на 3, значит, сумма в левой части обязана делится на три. Поскольку 2015 не делится на 3, то решений нет.

**Ответ:** Решений нет.

**10 класс. Решения заданий по математике.**

**1.** Петя из всех цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 выбрал те цифры, которые являются простыми числами. Затем он составил всевозможные числа, в каждом из которых присутствовали все выбранные им цифры (и только они), причем каждая из них — ровно по одному разу. После этого, Вася из всех составленных Петей чисел, выбрал все такие, которые кратны 9. Сколько чисел выбрал Вася?

**Решение.** Однозначные простые числа это: 2, 3, 5, 7. Сумма этих цифр не делится на 9, а значит, Вася выбрал ровно ноль чисел.

**Ответ:** 0.

**Замечание.** Если заявлено, что единица – это простое число и после этого обосновано получен ответ 120 — решение оцениваем в 4 балла.

**2.** Множество всех натуральных чисел разбили на *n* арифметических прогрессий (каждое натуральное число принадлежит ровно одной из этих *n* прогрессий и каждая прогрессия — бесконечна). Пусть *d*1, *d*2, ... , *dn* – разности этих прогрессий. Докажите, что 1/*d*1+1/*d*2+...+1/*dn*=1.

**Решение.** Положим *N*=*d*1*d*2...*dn*. Возьмем *N* последовательных натуральных чисел, таких, что меньшее из них больше всех первых членов *n* прогрессий. Тогда, среди этих *N* чисел ровно *N*/*d*1 чисел принадлежат первой прогрессии, ровно *N*/*d*2 принадлежат второй прогрессии, и т.д., ровно *N*/*dn* принадлежат *n*-ой прогрессии. Поскольку каждое из *N* чисел при этом должно быть учтено ровно один раз, то отсюда следует нужное равенство.

**3.** Каждая из сторон выпуклого четырехугольника пересекает некоторую окружность в двух точках, причем окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

**Решение.** Проведем окружность, имеющую общий центр с данной окружностью, касающуюся одной из хорд. Так как равные хорды равноудалены от центра окружности, то построенная окружность касается всех четырех хорд, т.е. является вписанной в четырехугольник.

**4.** Докажите, что для любых неотрицательных чисел *x* и *y* выполняется неравенство .

**Решение:** Рассмотрим функцию , она монотонно возрастает на полуинтервале , (т.к. графиком является гипербола). Тогда

Неравенство доказано.

**5.** Найдите все значения параметра , при каждом из которых уравнение

имеет два корня, один из которых удовлетворяет условию , а второй — нет.

**Решение.** Данное уравнение имеет два корня при . Пусть

. Решение задачи сводится к исследованию системы

При графиком функции *F* является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины отрицательна. Из этого следует, что для того, чтобы система имела единственное решение необходимо, чтобы выполнялось: Для этого решим систему ; . Исключив 0, получим ответ.

**Ответ:** .

**6.** В Лондоне произошло крупное ограбление банка. Для поимки вора Скотленд-Ярд позвал Шерлока Холмса. Шерлок не знает, где находится вор, но он знает, как вор движется. Лондон делится на 2015 районов, пронумерованных от 1 до 2015. Вор движется следующим образом: Каждый час вор покидает район *X*, в котором он на данный момент прячется, и переходит в один из районов *X* - 1 или *X* + 1 при условии, что этот район существует в Лондоне. Шерлок может каждый час выбирать любойрайон в Лондоне и полностью обыскивать его, (если вор расположен в нем, то он будет пойман). Может ли Шерлок Холмс поймать вора за 5000 часов?

**Решение:** Шерлок Холмс может последовательно обыскать районы с номерами от 1 до 2015, затем с 2015 до 1 по порядку (2015 обыскивается дважды). При такой стратегии проведения обысков вор будет пойман.

Если в момент начала обыска района с номером 1 вор будет прятаться в районе с нечетным номером, то вор будет пойман еще до обыска района 2015, потому что имеют место два факта: 1) четность номеров районов обыска и нахождения вора совпадают и 2) номер обыска всегда не больше номера района нахождения вора.

Если в момент начала обыска района с номером 1 вор будет прятаться в районе с четным номером, то вор будет пойман не ранее второго обыска района 2015. При втором обыске района 2015 четность номеров районов обыска и нахождения вора совпадут, и далее до самой поимки будут совпадать.

**Ответ:** Может.

**11 класс. Решения заданий по математике.**

**1.** Назовём натуральное число «хорошим», если его десятичная запись состоит из всех возможных четных цифр, причем каждая цифра встречается ровно один раз. Сколько всего существует «хороших» натуральных чисел?

**Решение.** Всего четных цифр — пять (0, 2, 4, 6, 8). Всего различных комбинаций из пяти символов 5!=120, но когда ноль стоит на первом месте, то эта комбинация — не число. Поэтому такие комбинации (их будет 4!=24) нужно убрать. В итоге получаем 120−24=96 «хороших» натуральных чисел.

**Ответ:** 96.

**Замечание.** Только правильный ответ без обоснования: 3 балла.

За решение, в котором не учтено, что ноль не должен быть на первом месте (с ответом 120): 1 балл.

**2.** Гарри Поттер построил куб ABCDA1B1C1D1 и отметил две диагонали каких-то двух различных граней, по одной на каждой из них. Какие значения может принимать градусная мера угла между прямыми, содержащими отмеченные диагонали?

**Решение.** Грани могут быть либо противоположными, либо смежными. Если грани противоположные, то угол между диагоналями может быть либо 0° (если диагонали параллельны), либо 90° (если они перпендикулярны). Рассмотрим случай смежных граней. В этом случае диагонали либо выходят из общей вершины, либо нет.

Если они выходят из общей вершины, то соединив противоположные концы отмеченных диагоналей, получим равносторонний треугольник, со стороной , где — ребро куба. Поэтому в этом случае искомый угол будет равен 60°. Если общей вершины у диагоналей нет, то произведем параллельный перенос одной из диагоналей на противоположную грань. В этом случае угол не изменится, но мы получим уже разобранный выше случай (в котором угол равен 60°).

**Ответ:** 0°; 60°; 90°

**Замечания.** Как видим, здесь 4 случая. За не рассмотрение одного случая снимать 2 балла (за каждый нерассмотренный).

За ответ 60°, если при этом рассмотрено 2 случая — ставим 4 балла, если рассмотрен только один случай — оцениваем 2 балла, За каждый из ответов 0° либо 90° добавляем по баллу. Баллы суммируются.

За каждый лишний ответ снимаем 2 балла. (За полное решение добавляется поощрительный балл и сумма становится 7 баллов)

**3.** Шестизначное натуральное число делится на 7 нацело. Докажите, что если последнюю его цифру переставить в начало (поставить перед первой), то полученное число тоже будет делиться на 7 нацело.

**Решение.** Пусть последняя цифра исходного числа равна *d*. Тогда можем представить , где — некоторое пятизначное число. Новое число можно представить в виде . Заметим, что разность

делится на 7. Поэтому, если делится на 7, то и делится на 7.

**4.** Решите уравнение

То есть, найдите всевозможные значения пар (*x*; *y*), при подстановке которых, данное уравнение обращается в верное равенство.

**Решение.** Если , то , причём равенство достигается только при . Если , то причём равенство достигается только при . Поскольку,

и , то . Следовательно, левая часть может быть равна правой части только когда каждая из них равна 2 или −2. Поэтому уравнение равносильно совокупности систем:

или

Первая система решений не имеет, поскольку . Вторая система имеет решение , , .

**Ответ:** , , .

**5.** В треугольнике *ABC* углы *A* и *С* равны по 40 градусов. Биссектриса угла *А* пересекает сторону *BC* в точке *D*. Докажите, что *AC* = *AD* + *BD*.

**Решение 1.** Применяя теорему синусов для треугольников *ABD* и *ABC*. Заметим, что

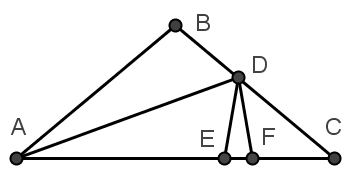
, , .

Поэтому нам нужно доказать тождество

Преобразовывая, получаем, что задача эквивалентна тождеству

Умножая его на 2 и применяя формулу , получаем, что задача свелась к равенству

которое является верным, т.к. и .

**Решение 2.** На стороне *АС* отложим *AE*=*AB* и *AF*=*AD*. Осталось доказать, что *BD*=*FC*. Покажем это. Треугольники *BAD* и *EAD* равны и, следовательно, . Треугольник *DAF* — равнобедренный с углом при вершине *A* равным 20°. Следовательно, Это означает, что треугольник *EDF* — равнобедренный, *DE*=*DF*. Далее, , и следовательно, . Это означает, что треугольник тоже равнобедренный, *DF*=*FC*.

Получаем, что *BD*=*DE*=*DF*=*FC*.

**6.** В каждой клетке таблицы 5×5 стоят знаки «+» или «−» (в одной клетке – один знак). Разрешается положить крест, состоящий из пяти клеток, центральной клеткой на любую клетку таблицы. При этом, все знаки в клетках таблицы, закрытые крестом — меняются на противоположные. Можно ли с помощью таких операций поменять знаки во всех клетках таблицы на противоположные?

**Решение.** Если мы будем ставить центры крестов на клетки отмеченные звездочками, то за 15 ходов поменяем все знаки на противоположные.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ★ |  | ★ | ★ |  |
|  | ★ | ★ | ★ |  |
| ★ | ★ | ★ |  |  |
| ★ | ★ |  | ★ | ★ |
|  |  |  | ★ | ★ |

**Ответ:** Можно.

**Замечание.** Отдельное наблюдение о том, что нет необходимости класть крест в одно и то же место более одного раза не является продвижением в решении задачи и оценивается в ноль баллов.

Возможны другие примеры. Любой правильный пример оценивается в 7 баллов.